Universitatea din Craiova
Facultatea de Automatică, Calculatoare şi Electronică
Examen de admitere la licenţă - Sesiunea iulie 2023
Domeniul Calculatoare şi Tehnologia Informaţiei
Proba scrisă la matematică

Model 1

---

1 **(3p)** Mulţimea soluţiilor reale ale ecuaţiei $\sqrt{2x+1} = x+1$ este:

A $\emptyset$ B $\{0\}$ C $\{0,1\}$ D $\{1\}$ E $\{-1,0,1\}$

---

2 **(3p)** Se consideră progresia aritmetică 1, 4, 7, 10, ... Al douăzecilea termen al său este:

A 60 B 58 C 56 D 54 E 62

---

3 **(3p)** Modulul numărului complex $z = \dfrac{1-3i}{1+3i}$ este:

A 2 B $\sqrt{3}$ C $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ D $\dfrac{1}{2}$ E 1

---

4 **(3p)** Coeficientul termenului care îl conţine pe x^6 din dezvoltarea $\left(x^2 + \frac{2}{\sqrt{x}}\right)^8$ este:

A $C_8^4 2^4$ B $C_8^6 2^6$ C $C_8^5 2^5$ D 1 E 8

---

5 **(3p)** Soluţia ecuaţiei $\log_3(x^2+9) - \log_3(2x) = 1$ este:

A 0 B 1 C $\dfrac{1}{3}$ D 9 E 3

---

6 **(3p)** Se consideră punctul $A(1,0)$. Distanţa de la punctul A la dreapta d de ecuaţie $x - \sqrt{3}y + 3 = 0$ este:

A $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ B $\dfrac{1}{2}$ C 2 D 1 E 0

---

7 **(3p)** Valoarea numărului $4\sin\dfrac{\pi}{12}\cos\dfrac{\pi}{12}$ este:

A 2 B $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ C $\sqrt{2}$ D 1 E $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

---

8 **(3p)** Se consideră triunghiul ABC de vârfuri $A(-2,1)$, $B(-1,0)$, $C(3,4)$. Ecuaţia medianei duse din vârful A este:

A $3x - y + 1 = 0$ B $x - 3y + 5 = 0$ C $2x - 3y + 5 = 0$

D $x + 3y - 5 = 0$ E $3x - y + 5 = 0$

---

9 **(3p)** Soluţiile ecuaţiei $\sin 2x = \cos x$, care aparţin intervalului $[0, 2\pi]$, sunt:

A $\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$ B $\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{6}$ C $\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{6}$ D $\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{6}, \frac{3\pi}{2}$

E $\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$

Fie $a \in (0, \infty)$ şi funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = a^x + 3^x - 2 \cdot 5^x$.

10 **(3p)** Derivata $f'(0)$ este:

A 1 B $\ln(3a)$ C $\ln \frac{3a}{25}$ D $\ln \frac{1}{25}$ E $\ln \frac{3}{25}$

11 **(3p)** Dacă $f(x) \geq 0$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$, atunci numărul $a + \frac{1}{a}$ este egal cu:

A $\frac{75}{628}$ B $\frac{634}{75}$ C 2 D $\frac{5}{2}$ E $\frac{10}{3}$

12 **(3p)** Dacă $a = \mathrm{e}$, atunci $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$ este:

A $\frac{2}{\ln 3} - \frac{8}{\ln 5}$ B $\mathrm{e} - 1$ C $\frac{2}{\ln 3} + \frac{8}{\ln 5}$ D $\mathrm{e} + 1$ E $\mathrm{e} - 1 + \frac{2}{\ln 3} - \frac{8}{\ln 5}$

Se consideră funcţia $f : (0, 1) \to \mathbb{R}$, $f(x) = x \ln(1 - x)$.

13 **(3p)** Derivata $f'(x)$, pentru orice $x \in (0, 1)$, este:

A $\ln(1 - x) - \frac{x}{1 - x}$ B $\frac{x}{1 - x}$ C $\ln(1 - x) + 1$ D $\ln(1 - x)$

E $\ln(1 - x) + \frac{x}{1 - x}$

14 **(3p)** Ecuaţia tangentei la graficul funcţiei f în punctul de abscisă $\frac{\mathrm{e} - 1}{\mathrm{e}}$ este:

A $y = -1 + \frac{1}{\mathrm{e}} - \mathrm{e}\left(x - 1 + \frac{1}{\mathrm{e}}\right)$ B $y = -1$ C $y = -\mathrm{e}\left(x - 1 + \frac{1}{\mathrm{e}}\right)$

D $y = -1 + \frac{1}{\mathrm{e}}$ E $x = \frac{\mathrm{e} - 1}{\mathrm{e}}$

15 **(3p)** Valoarea limitei $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$ este:

A $\frac{1}{4}$ B 0 C $-\frac{1}{4}$ D $-\frac{3}{4}$ E $\frac{1}{2}$

Pe mulţimea numerelor reale se consideră legea de compoziţie asociativă

$$x \circ y = xy - 5x - 5y + 30.$$

16 **(3p)** Elementul neutru ale legii ,,$\circ$" este:

A 5 B 2 C 6 D 4 E 0

17 **(3p)** Numărul $1 \circ 2 \circ 3 \circ ... \circ 800$ este egal cu:

A 5 B 22 C 9 D 10 E 15

18 **(3p)** Suma soluţiilor reale ale ecuaţiei $x \circ x \circ x = x$ este:

A 2 B 22 C 9 D 10 E 15

Se consideră polinomul $f = X^3 - 2X^2 - 2X + 3$ cu rădăcinile x_1, x_2, x_3.

19 **(3p)** Care este valoarea numărului $x_1 + x_2 + x_3$?

A 2 B 3 C -2 D -3 E 1

20 **(3p)** Care este valoarea numărului $\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} + \frac{1}{x_3^2}$?

A $\frac{1}{4}$ B $\frac{1}{9}$ C $\frac{16}{9}$ D $\frac{4}{9}$ E $\frac{9}{4}$

Se consideră funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x + \mathrm{e}^{-x}$.

21 **(3p)** Punctele de extrem ale funcţiei f sunt în număr de:

A 3 B 4 C 0 D 1 E 2

22 **(3p)** Funcţia f este descrescătoare pe mulţimea:

A $(-\infty, 0]$ B $[-1, 2)$ C $(0, \infty)$ D $\mathbb{R}$ E $(0, 5)$

23 **(3p)** Valoarea integralei $\int_0^1 x f\left(x^2\right) \mathrm{d}x$ este:

A $\frac{1 - 3\mathrm{e}}{6}$ B $\frac{5 - 3\mathrm{e}}{6}$ C $\frac{1 + 3\mathrm{e}}{6}$ D $\frac{2 - 3\mathrm{e}}{4\mathrm{e}}$ E $\frac{-2 + 3\mathrm{e}}{4\mathrm{e}}$

Se consideră funcţia $f : (-8, 8) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \ln \frac{8 + x}{8 - x}$.

24 **(3p)** Asimptotele la graficul funcţiei f sunt în număr de:

A 2 B 4 C 0 D 1 E 3

25 **(3p)** Care este valoarea limitei $\lim_{x \to \infty} x f\left(\frac{1}{x}\right)$?

A 8 B 4 C $\frac{1}{4}$ D $\mathrm{e}^{\frac{1}{4}}$ E e^8

26 **(3p)** Valoarea integralei $\int_0^1 e^{f(x)} dx$ este:

A 1 B $16\ln\frac{8}{7}-1$ C $16\ln\frac{7}{8}-1$ D $16\ln\frac{8}{7}+1$ E -1

Se consideră matricea $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.

27 **(3p)** Valoarea determinantului matricei A este:

A 2 B 0 C -4 D 1 E 6

28 **(3p)** Inversa matricei A este:

A $\begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}$ B $\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ C $\begin{pmatrix} 0 & -1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & -1/2 \\ -1/2 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}$

D $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ E $\begin{pmatrix} 0 & -1/2 & -1/2 \\ -1/2 & 0 & -1/2 \\ -1/2 & -1/2 & 0 \end{pmatrix}$

29 **(3p)** Valoarea numărului real a, pentru care $A^2 = A + a \cdot I_3$, este:

A 0 B -1 C 3 D 2 E -3

---

30 **(3p)** Se consideră funcţia $f:[-1,1]\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt{1-x^2}$. Limita $\lim\limits_{t\to\infty}\int_0^1 x^t f(x)\,dx$ este egală cu:

A 1 B 0 C -1 D $\frac{1}{2}$ E 2

Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.

Soluţii

Model 1

1 Din condiţiile $2x+1 \geq 0$ şi $x+1 \geq 0$, rezultă $x \geq -\frac{1}{2}$. Prin ridicare la pătrat, obţinem $x = 0$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{B}}$

2 $a_{20} = a_1 + 19r$, unde $a_1 = 1$ şi $r = 3$. Deci $a_{20} = 58$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{B}}$

3 $|z| = \frac{|1-3i|}{|1+3i|} = \frac{10}{10} = 1$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{E}}$

4 $T_{k+1} = C_8^k \left(x^2\right)^{8-k} \left(\frac{2}{\sqrt{x}}\right)^k = C_8^k 2^k x^{16-\frac{5k}{2}}$. Din condiţia $16 - \frac{5k}{2} = 6$ rezultă $k = 4$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{A}}$

5 Condiţiile de existenţă a logaritmilor sunt $x^2+9 > 0$, $2x > 0$. Deci căutăm soluţii $x > 0$. Ecuaţia devine $\log_3 \frac{x^2+9}{2x} = 1$ sau $\frac{x^2+9}{2x} = 3$, cu unica soluţie $x = 3$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{E}}$

6 $\text{dist}(A, d) = \frac{|1 \cdot (-1) + 0 \cdot \sqrt{3} + 3|}{\sqrt{1^2 + (-\sqrt{3})^2}}$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{D}}$

7 $\sin(2\alpha) = 2\sin\alpha\cos\alpha$. Deci $4\sin\frac{\pi}{12}\cos\frac{\pi}{12} = 2\sin\frac{\pi}{6}$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{D}}$

8 Mijlocul laturii $[BC]$ este $M(1,2)$. Mediana dusă din vârful A are ecuaţia $\frac{x - x_A}{x_M - x_A} = \frac{y - y_A}{y_M - y_A}$ sau, echivalent $x - 3y + 5 = 0$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{B}}$

9 Ecuaţia este echivalentă cu $2\sin x\cos x = \cos x$. Rezultă $\cos x = 0$ sau $\sin x = \frac{1}{2}$. Soluţiile din $[0, 2\pi]$ ale acestor două ecuaţii sunt $\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$ şi $\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{D}}$

10 $f'(x) = a^x \ln a + 3^x \ln 3 - 2 \cdot 5^x \ln 5$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Deci $f'(0) = \ln\frac{3a}{25}$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{C}}$

11 Observăm că $f(0)=0$, deci condiţia din ipoteză se rescrie $f(x)\geq f(0)$, $\forall x\in\mathbb{R}$. Prin urmare, 0 este punct de minim local pentru funţia f. Conform Teoremei lui Fermat, $f'(0)=0$. Rezultă $\ln\dfrac{3a}{25}=0$, de unde obţinem $a=\dfrac{25}{3}$. Aşadar, $a+\dfrac{1}{a}=\dfrac{634}{75}$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{B}}$

12 $\displaystyle\int_0^1 (\mathrm{e}^x+3^x-2\cdot 5^x)\,\mathrm{d}x=\mathrm{e}-1+\frac{2}{\ln 3}-\frac{8}{\ln 5}$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{E}}$

13 $f'(x)=\ln(1-x)-\dfrac{x}{1-x}$, $\forall x\in\mathbb{R}$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{A}}$

14 Tangenta la graficul funcţiei f în punctul de abscisă x_0 are ecuaţia $y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)$. Pentru $x_0=\dfrac{\mathrm{e}-1}{\mathrm{e}}$ obţinem ecuaţia $y=-1+\dfrac{1}{\mathrm{e}}-\mathrm{e}\left(x-1+\dfrac{1}{\mathrm{e}}\right)$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{A}}$

15 Integrând prin părţi, obţinem $\displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t=\frac{1}{2}(x^2-1)\ln(1-x)-\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}x^2$, oricare ar fi $x\in(0,1)$. Deci $\displaystyle\lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}}\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t=-\frac{3}{4}$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{D}}$

16 $x\circ y=(x-5)(y-5)+5$, $\forall x,y\in\mathbb{R}$. Din $x\circ e=e\circ x=x$, $\forall x\in\mathbb{R}$, obţinem $e=6$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{C}}$

17 Din asociativitate rezultă $a:=1\circ 2\circ\ldots\circ 800=(1\circ\ldots\circ 4)\circ 5\circ(6\circ\ldots\circ 800)=\alpha\circ 5\circ\beta$, unde $\alpha:=1\circ\ldots\circ 4$, $\beta:=6\circ\ldots\circ 800$. Cum $x\circ 5=5\circ x=5$, $\forall x\in\mathbb{R}$, obţinem imediat $a=5$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{A}}$

18 Avem $x\circ x\circ x=(x-5)^3+5$. Ecuaţia se rescrie $(x-5)^3+5=x$ şi are soluţiile $4,\ 5,\ 6$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{E}}$

19 Din relaţiile lui Viète, $x_1+x_2+x_3=S_1=2$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{A}}$

20 Avem succesiv

$$b:=\frac{1}{x_1^2}+\frac{1}{x_2^2}+\frac{1}{x_3^2}=\left(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}\right)^2-2\left(\frac{1}{x_1x_2}+\frac{1}{x_2x_3}+\frac{1}{x_1x_3}\right)=\frac{S_2^2}{S_3^2}-2\frac{S_1}{S_3}.$$

Cum $S_2=-2$, $S_3=-3$, rezultă $b=\dfrac{16}{9}$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{C}}$

21 $f'(x) = 1 - \mathrm{e}^{-x}$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Singurul punct critic al funcţiei f este $x = 0$. Cum $f'(x) \leq 0$, $\forall x \in (-\infty, 0]$ şi $f'(x) \geq 0$, $\forall x \in [0, \infty)$, obţinem că f este descrescătoare pe $(-\infty, 0]$ şi crescătoare pe $[0, \infty)$, deci are un singur punct de extrem, şi anume minim, $x = 0$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{D}}$

22 Răspuns corect: $\boxed{\text{A}}$

23 $\displaystyle\int_0^1 xf\left(x^2\right)\mathrm{d}x = \int_0^1 \left(x^3 + x\mathrm{e}^{-x^2}\right)\mathrm{d}x = \frac{x^4}{4}\Big|_0^1 - \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-x^2}\Big|_0^1 = \frac{1}{4} - \frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{-1} - 1\right).$

Răspuns corect: $\boxed{\text{E}}$

24 Cum $\displaystyle\lim_{\substack{x\to -8\\ x>-8}} f(x) = -\infty$, dreapta $x = -8$ este asimptotă verticală (la dreapta) şi $\displaystyle\lim_{\substack{x\to 8\\ x<8}} f(x) = \infty$, dreapta $x = 8$ este asimptotă verticală (la stânga).

Răspuns corect: $\boxed{\text{A}}$

25 Avem $\displaystyle\lim_{x\to\infty} xf\left(\frac{1}{x}\right) = \lim_{x\to\infty} x\ln = \lim_{x\to\infty} \ln\left(\frac{8x+1}{8x-1}\right)^x$.

Cum $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(\frac{8x+1}{8x-1}\right)^x = \lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{2}{8x-1}\right)^{\frac{8x-1}{2}}\right]^{\frac{2x}{6x-1}} = \mathrm{e}^{\frac{1}{4}}$, limita cerută este egală cu $\dfrac{1}{4}$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{C}}$

26 Obţinem $\displaystyle\int_0^1 \mathrm{e}^{f(x)}\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{8+x}{8-x}\mathrm{d}x = \int_0^1 \left(-1 + \frac{16}{8-x}\right)\mathrm{d}x$

Răspuns corect: $\boxed{\text{B}}$

27 Calcul direct.

Răspuns corect: $\boxed{\text{C}}$

28 Calcul direct.

Răspuns corect: $\boxed{\text{E}}$

29 Deoarece $A^2 - A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = 2 \cdot I_3$, rezultă $a = 2$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{E}}$

30 Evident, $0 \leq x^t\sqrt{1-x^2}$, $\forall x \in [0,1],\ \forall t > 0$. Deci

$$0 \leq \lim_{t\to\infty} \int_0^1 x^t\sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x,\ \forall t > 0. \tag{1}$$

Apoi, cum $\sqrt{1-x^2} \leq 1$, $\forall x \in [0,1]$, rezultă $x^t\sqrt{1-x^2} \leq x^t$, $\forall x \in [0,1],\ \forall t > 0$. Prin urmare, $\displaystyle\int_0^1 x^t\sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x \leq \int_0^1 x^t\mathrm{d}x = \frac{x^{t+1}}{t+1}\Big|_0^1 = \frac{1}{t+1}$, $\forall t > 0$. Trecând la limită cu $t \to \infty$, rezultă

$$\lim_{t\to\infty} \int_0^1 x^t\sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x \leq 0. \tag{2}$$

Din relaţiile (1) şi (2), folosind criteriul cleştelui, deducem că limita cerută este egală cu 0.

Răspuns corect: $\boxed{\text{B}}$

Universitatea din Craiova
Facultatea de Automatică, Calculatoare şi Electronică
Examen de admitere la licenţă - Sesiunea iulie 2023
Domeniul Calculatoare şi Tehnologia Informaţiei
Proba scrisă la matematică

Model 2

---

1 **(3p)** Soluţia în $\mathbb{C}$ a ecuaţiei $2z - 3\bar{z} = 1 + 5i$ este:

A $1+i$ B $1-i$ C $-1-i$ D $-1+i$ E 0

---

2 **(3p)** Se consideră ecuaţia $x^2 - 2mx + m + 1 = 0$, având rădăcinile x_1, x_2. Numărul $m \in \mathbb{R}^*$, pentru care $x_1^2 + x_2^2 - x_1x_2 = -3$, este:

A $\frac{3}{4}$ B $\frac{4}{3}$ C 3 D 4 E 1

---

3 **(3p)** Ecuaţia $\log_3 x + \log_9 x - \log_{\sqrt{3}} x = \frac{3}{2}$ are soluţia reală:

A -3^3 B 3^{-3} C 2^3 D 3^2 E 3^3

---

4 **(3p)** Coeficientul lui x^4 în dezvoltarea $(2+x)^{10}$ este:

A $C_{10}^4 2^4$ B 2^6 C $C_{10}^4 2$ D $C_{10}^4 2^6$ E C_{10}^4

---

5 **(3p)** Mulţimea soluţiilor reale ale ecuaţiei $\sqrt[3]{x} = x$ este:

A $\{0,1\}$ B $\{0\}$ C $\{-1,0,1\}$ D $\{-1,0\}$ E $\emptyset$

---

6 **(3p)** Mulţimea numerelor reale care verifică ecuaţia $8^x - 8^{1-x} = 2$ este:

A $\emptyset$ B $\left\{\frac{3}{2}\right\}$ C $\left\{8, \frac{2}{3}\right\}$ D $\left\{1, \frac{2}{3}\right\}$ E $\left\{\frac{2}{3}\right\}$

---

7 **(3p)** Fie $x \in \mathbb{R}$, astfel încât $\operatorname{ctg} x = 1$. Atunci $\sin^2 x$ este egal cu:

A $\frac{1}{2}$ B 1 C $\frac{\sqrt{2}}{2}$ D $\frac{3}{4}$ E $\frac{1}{4}$

---

8 **(3p)** Raza cercului circumscris triunghiului ABC, având laturile de lungimi 4, 5, 7, este egală cu:

A $\frac{1}{24}$ B $\frac{35\sqrt{6}}{24}$ C $\frac{\sqrt{6}}{24}$ D $\frac{35}{24}$ E $\frac{35\sqrt{6}}{12}$

Se consideră matricea $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ m & 1 & 2m \\ 0 & 1 & m \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.

9 **(3p)** Mulţimea numerelor $m \in \mathbb{R}$, pentru care matricea A este inversabilă, este:

A $\mathbb{R} \setminus \{0,1\}$ B $\mathbb{R}$ C $\{0\}$ D $\{1\}$ E $\mathbb{R} \setminus \{1\}$

10 **(3p)** Mulţimea numerelor $m \in \mathbb{R}$, pentru care $A^{-1} = \frac{1}{2}A^*$, este:

A $\{1,-2\}$ B $\emptyset$ C $\{-1,-2\}$ D $\{-1,2\}$ E $\{1,2\}$

11 **(3p)** Mulţimea numerelor $m \in \mathbb{Z}$, pentru care $A^{-1} \in \mathscr{M}_3(\mathbb{Z})$, este:

A $\{-1\}$ B $\{1\}$ C $\emptyset$ D $\{0\}$ E $\{-1,1\}$

Se consideră polinomul $f = (X+i)^{2022} + (X-i)^{2022} \in \mathbb{C}[X]$.

12 **(3p)** Valoarea numărului $f(-1)$ este:

A 2^{1011} B 0 C 2 D 2^{1012} E -2^{1011}

---

13 **(3p)** Restul împărţirii polinomului f la $X+1$ este:

A 1 B -1 C 2 D 0 E -2

14 **(3p)** Numărul de rădăcini reale ale polinomului f este:

A 2020 B 2022 C 2 D 0 E 4

Se consideră funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$.

15 **(3p)** Funcţia f este strict crescătoare pe mulţimea:

A $(-\infty,-1) \cup (1,\infty)$ B $(1,2)$ C $(-1,1)$ D $(-\infty,-1)$ E $(1,\infty)$

16 **(3p)** Ecuaţia tangentei la graficul funcţiei f, în punctul de abscisă $x_0 = 0$, este:

A $y = 2x$ B $2y = x$ C $y = -x$ D $y = -2x$ E $y = x$

17 **(3p)** Pentru orice $x \in (0,\infty)$ numărul $f(x) - \operatorname{arctg} x$ aparţine mulţimii:

A $(1,\infty)$ B $(0,1)$ C $(0,\infty)$ D $(1,2)$ E $\left(-\frac{\pi}{2},0\right)$

Se consideră funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{25+x^2}$.

18 **(3p)** Integrala $\displaystyle\int_{-5}^{5} x f(x)\,\mathrm{d}x$ este egală cu:

A $5\sqrt{2}$ B 5 C $\frac{1}{5}$ D 0 E $\frac{\sqrt{2}}{5}$

19 **(3p)** Aria domeniului mărginit de graficul funcţiei f, axa Ox şi dreptele de ecuaţii $x = 5$ şi $x = -5$ este:

A 25 B $25\left(\sqrt{2} + \ln\left(\sqrt{2}+1\right)\right)$ C $25\ln\left(\sqrt{2}+1\right)$ D $\sqrt{2}+\ln\left(\sqrt{2}+1\right)$ E $\ln\left(\sqrt{2}+1\right)$

20 **(3p)** Limita $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{x^{2023}} \cdot \int_x^{x+1} f(t)\,\mathrm{d}t$ este egală cu:

A 0 B 1 C $\frac{1}{2023}$ D 2023 E ∞

Se consideră triunghiul OAB, de vârfuri $O(0,0)$, $A(2,0)$, $B(1,1)$.

21 **(3p)** Ecuaţia mediatoarei segmentului $[AB]$ este:

A $x+y=1$ B $x+y=2$ C $x-y=2$ D $x-y=-1$ E $x=1$

22 **(3p)** Aria triunghiului OAB este:

A 1 B 2 C $\frac{1}{2}$ D $\frac{3}{2}$ E $\frac{1}{3}$

Se consideră funcţia $f : [-2,2] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 + x$.

23 **(3p)** Integrala $\int_{-2}^{2} f(x)\,\mathrm{d}x$ este egală cu:

A 2 B 4 C 0 D 6 E 12

24 **(3p)** Integrala $\int_{-2}^{2} xf(x)\,\mathrm{d}x$ este egală cu:

A $\frac{272}{15}$ B $\frac{1}{15}$ C $\frac{32}{15}$ D $\frac{8}{3}$ E $\frac{136}{15}$

Se consideră funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$.

25 **(3p)** Numărul de asimptote la graficul funcţiei f este:

A 0 B 2 C 1 D 3 E 4

26 **(3p)** Integrala $\int_0^1 xf\left(\sqrt{x}\right)\mathrm{d}x$ este egală cu:

A $1+\ln 2$ B $\ln 2$ C $1-\ln 2$ D 1 E $2-\ln 2$

27 **(3p)** Numărul punctelor de extrem local ale funcţiei f este:

A 1 B 2 C 4 D 0 E 3

Se consideră funcţia $f : \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sin x$.

28 **(3p)** Integrala $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{1+f^2(x)}\mathrm{d}x$ este egală cu:

A $\frac{1}{2}$ B π C $\frac{\pi}{2}$ D $\frac{\pi}{4}$ E $\frac{\pi}{8}$

29 **(3p)** Volumul corpului obţinut prin rotaţia graficului funcţiei f în jurul axei Ox este:

A π^2 B $\frac{\pi^2}{2}$ C $\frac{\pi^2}{4}$ D $\pi^2 - 1$ E $\frac{\pi^2}{4} - \frac{\pi}{4}$

---

30 **(3p)** Suma primilor 10 termeni ai progresiei geometrice 2, 4, 8, 16, ... aparţine intervalului:

A $(2^{11} - 3, 2^{11} - 1)$ B $(2^{10} - 3, 2^{10} - 1)$ C $(2^{12} - 3, 2^{12} - 1)$

D $(2^{10} - 1, 2^{10})$ E $(2^{11} - 1, 2^{11})$

Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.

Soluţii

Model 2

1 Dacă $z = x + yi$, ecuaţia devine $2(x + 3y) - 3(x - yi) = 1 + 5i$. Rezultă $x = -1$, $y = 1$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{D}}$

2 $S = x_1 + x_2 = 2m$, $P = x_1x_2 = m + 1$. Relaţia devine $S^2 - 3P = -3$, de unde $m_1 = 0$, $m_2 = \dfrac{3}{4}$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{A}}$

3 Ecuaţia este echivalentă cu $\log_3 x + \dfrac{1}{2}\log_3 x - 2\log_3 x = \dfrac{3}{2}$, de unde $\log_3 x = -3$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{B}}$

4 $T_{k+1} = C_{10}^k 2^{10-k} x^k$. Se obţine $k = 4$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{D}}$

5 Prin ridicare la puterea a treia, ecuaţia este echivalentă cu $x = x^3$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{C}}$

6 Notăm $t := 8^x$ şi ecuaţia devine $t - \dfrac{8}{t} = 2$, de unde $t = 4$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{E}}$

7 $\sin^2 x = \dfrac{\operatorname{tg}^2 x}{1 + \operatorname{tg}^2 x}$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{A}}$

8 $R = \dfrac{abc}{4S} = \dfrac{abc}{4\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{B}}$

9 $\det(A) \neq 0$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{A}}$

10 Cum $A^{-1} = \dfrac{1}{\det(A)} A^*$, obţinem $\det(A) = 2$, de unde rezultă $m_1 = -1$, $m_2 = 2$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{D}}$

11 Din $A \cdot A^{-1} = I_3$ rezultă $\det(A)\det(A^{-1}) = \det(I_3) = 1$. Cum $A^{-1} \in \mathscr{M}_3(\mathbb{Z})$, pentru ca $\det(A^{-1}) = \dfrac{1}{\det(A)} \in \mathbb{Z}$, trebuie ca $\det(A) = \pm 1$ sau, echivalent, $m^2 - m = \pm 1$, condiţie care nu e satisfăcută de niciun număr $m \in \mathbb{Z}$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{C}}$

12 $f(-1) = [(1+i)^2]^{1011} + [(1-i)^2]^{1011} = (2i)^{1011} + (-2i)^{1011} = 0$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{B}}$

13 Cum $f(-1) = 0$, restul este 0.

Răspuns corect: $\boxed{\text{D}}$

14 Fie $\alpha = a + bi \in \mathbb{C}$ rădăcină a polinomului f, cu a, $b \in \mathbb{R}$. Din $f(\alpha) = 0$, obţinem $(\alpha + i)^{2022} = -(\alpha - i)^{2022}$. De aici rezultă $|\alpha + i|^{2022} = |\alpha - i|^{2022}$. Obţinem imediat $a^2 + (b+1)^2 = a^2 + (b-1)^2$ şi astfel $b = 0$. Prin urmare, polinomul f are numai rădăcini reale.

Răspuns corect: $\boxed{\text{B}}$

15 $f'(x) = \dfrac{1 - x^2}{(x^2+1)^2}$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{C}}$

16 $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{E}}$

17 Fie $g : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $g(x) = f(x) - \operatorname{arctg} x$. Din tabelul de variaţie, rezultă că imaginea funcţiei g este $\left(-\dfrac{\pi}{2}, 0\right)$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{E}}$

18 Funcţie impară pe interval simetric faţă de 0.

Răspuns corect: $\boxed{\text{D}}$

19 $\mathscr{A} = \displaystyle\int_{-5}^{5} \sqrt{25 + x^2}\,\mathrm{d}x$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{B}}$

20 Conform teoremei de medie, oricare ar fi $x \in (0, \infty)$ există $c_x \in [x, x+1]$, astfel încât $\displaystyle\int_x^{x+1} f(t)\,\mathrm{d}t = f(c_x)$. Deci, $\forall x \in (0, \infty)$,

$$\frac{\sqrt{25 + x^2}}{x^{2023}} \leq \frac{1}{x^{2023}} \cdot \int_x^{x+1} f(t)\,\mathrm{d}t \leq \frac{\sqrt{25 + (x+1)^2}}{x^{2023}}.$$

Răspuns corect: $\boxed{\text{A}}$

21 Mijlocul segmentului $[AB]$ este $M\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right)$. Panta dreptei AB este $m_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = -1$, iar panta mediatoarei segmentului $[AB]$ este $m = -\frac{1}{m_{AB}} = 1$. Ecuaţia mediatoarei este $y - y_M = m(x - x_M)$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{D}}$

22 $\mathscr{A}_{OAB} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_O & y_O & 1 \\ x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \end{vmatrix}$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{A}}$

23 Funcţie impară pe interval simetric faţă de 0.

Răspuns corect: $\boxed{\text{C}}$

24 Calcul direct.

Răspuns corect: $\boxed{\text{A}}$

25 Graficul funcţiei f are asimptote orizontale la $-\infty$ şi ∞.

Răspuns corect: $\boxed{\text{B}}$

26 Calcul direct.

Răspuns corect: $\boxed{\text{C}}$

27 Funcţia f are un punct de maxim local în $x = 0$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{A}}$

28 Calcul direct.

Răspuns corect: $\boxed{\text{D}}$

29 $\mathscr{V} = \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} f^2 x \mathrm{d}x$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{C}}$

30 $S_{10} = 2\frac{1 - 2^{10}}{1 - 2}$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{A}}$

Universitatea din Craiova
Facultatea de Automatică, Calculatoare şi Electronică
Examen de admitere la licenţă - Sesiunea iulie 2023
Domeniul Calculatoare şi Tehnologia Informaţiei
Proba scrisă la matematică

Model 3

---

1 **(3p)** Mulţimea valorilor lui $m \in \mathbb{R}$, pentru care $x_1^2 + x_2^2 - x_1x_2 = 0$, unde x_1, x_2 sunt rădăcinile ecuaţiei $x^2 - 2mx + m = 0$, este:

A $m \in \left\{-1, \frac{3}{4}\right\}$ B $m \in \left\{1, \frac{3}{4}\right\}$ C $m \in \left\{0, -\frac{3}{4}\right\}$ D $m \in \left\{0, \frac{3}{4}\right\}$

E $m \in \left\{0, \frac{3}{2}\right\}$

---

2 **(3p)** Soluţia ecuaţiei $\log_3 x + \log_9 x - \log_{\sqrt{3}} x = \frac{3}{2}$ este:

A $x = \frac{1}{27}$ B $x = \frac{1}{3}$ C $x = \frac{1}{9}$ D $x = 3$ E $x = 9$

---

3 **(3p)** Numărul termenilor raţionali ai dezvoltării $\left(\sqrt[5]{3} + \sqrt{2}\right)^{20}$ este:

A 2 B 5 C 6 D 3 E 4

---

4 **(3p)** Ştiind că $\sin x = \frac{1}{2}$, valoarea lui $\cos 2x$ este:

A $-\frac{1}{2}$ B $\frac{\sqrt{3}}{2}$ C $\frac{1}{2}$ D $-\frac{\sqrt{1}}{2}$ E $\frac{1}{4}$

---

5 **(3p)** Partea întreagă a numărului $\left(\sqrt{8} + 1\right)^2$ este:

A 14 B 9 C 13 D 12 E 10

---

6 **(3p)** Care este valoarea numărului real a pentru care graficul funcţiei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 2(a+2)x + a^2 + 2$ intersectează axa Ox într-un singur punct ?

A $-\frac{1}{2}$ B -1 C -2 D $-\frac{1}{4}$ E 0

---

7 **(3p)** Distanţa de la punctul $A(2,2)$ la dreapta determinată de punctele $B(4,0)$ şi $C(0,4)$ este:

A $\frac{\sqrt{3}}{2}$ B $\frac{\sqrt{5}}{2}$ C $\frac{\sqrt{2}}{3}$ D 0 E $\frac{\sqrt{2}}{2}$

---

8 **(3p)** Câte numere naturale de trei cifre distincte se pot forma cu cifre din mulţimea $\{1,3,5,7,9\}$?

A A_5^3 B C_5^3 C 60 D 70 E 30

---

9 **(3p)** Care este valoarea pozitivă a lui m, astfel încât vectorii $\vec{u} = (m+1)\,\vec{i} + 8\vec{j}$ şi $\vec{v} = (m-1)\,\vec{i} - \vec{j}$ să fie perpendiculari ?

A 3 B $\frac{9}{7}$ C $-\frac{9}{7}$ D -2 E 0

---

10 **(3p)** Se consideră punctele $A(1,1)$, $B(3,4)$, $C(0,2)$. Numărul $\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right) \cdot \overrightarrow{CB}$ este egal cu:

A -12 B -1 C 11 D -13 E 0

---

11 **(3p)** Care sunt valorile parametrului real m, pentru care $x^2 - x - m > 0$, oricare ar fi număr real x ?

A $m \in \left(-\infty, -\frac{1}{4}\right)$ B $m \in \left(-\infty, \frac{1}{2}\right)$ C $m \in \left(-\infty, \frac{1}{4}\right)$

D $m \in (-\infty, 2)$ E $m \in (-\infty, 4)$

Se consideră matricea $A = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 3 & -9 \end{pmatrix}$ şi mulţimea $G = \{X(a),\ X(a) = I_2 + aA,\ a \in \mathbb{R}\}$.

12 **(3p)** Pentru orice $a,\ b \in \mathbb{R}$ matricea $X(a) \cdot X(b)$ este egală cu:

A $X(10ab)$ B $X(a+b)$ C $X(a+b-ab)$ D $X(a+b-10ab)$

E $X(a+b-9ab)$

13 **(3p)** Câte soluţii în mulţimea G are ecuaţia $X^2 = \begin{pmatrix} \frac{17}{5} & -\frac{36}{5} \\ -\frac{36}{5} & \frac{113}{5} \end{pmatrix}$?

A 2 B 1 C 0 D 3 E 4

---

14 **(3p)** Se consideră mulţimea $G = (-1,1)$, legea de compoziţie $x * y = \dfrac{x+y}{1+xy}$ şi $f : G \to (0,\infty)$, $f(x) = \dfrac{1-x}{1+x}$ izomorfism de grupuri de la $(G,*)$ la $((0,\infty),\cdot)$. Numărul $\dfrac{1}{2} * \dfrac{1}{4} * \dfrac{1}{6} * ... * \dfrac{1}{2022}$ este egal cu:

A $\dfrac{1}{2023}$ B $\dfrac{1}{2022}$ C $\dfrac{1011}{1012}$ D $\dfrac{1011}{2023}$ E $\dfrac{3}{2023}$

Se consideră sistemul de ecuaţii liniare $\begin{cases} x + y + 2z = 2 \\ 3x + ay + z = 0 \\ x - y + z = \frac{4}{5} \end{cases}$, unde $a \in \mathbb{R}$.

15 **(3p)** Pentru $a = 0$, valoarea determinantului matricei pătratice asociate sistemului dat este:

A -7 B -3 C -9 D 0 E -8

16 **(3p)** Pentru $a = -7$, sistemul dat are:

A o singură soluţie B două soluţii C o infinitate de soluţii

D trei soluţii E nicio soluţie

Se consideră polinomul $f = X^4 + aX^3 + bX^2 + cX + 2 \in \mathbb{R}[X]$, având rădăcinile x_1, x_2, x_3, $x_4 \in \mathbb{C}$.

17 **(3p)** Ştiind că restul împărţirii polinomului f la $X + 1$ este 31, valoarea numărului $-a + b - c$ este:

A 31 B 25 C 57 D 0 E 28

18 **(3p)** Valoarea lui $c \in \mathbb{R}$, astfel încât $x_1x_2x_3x_4 + \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} + \frac{1}{x_4} = 37$, este:

A -37 B 70 C -36 D -70 E 36

Se consideră funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \ln \frac{x^2+5}{x^2+1}$.

19 **(3p)** Derivata $f'(x)$, $x \in \mathbb{R}$, este:

A $\frac{-8x}{(x^2+1)(x^2+5)}$ B $\frac{-6x}{(x^2+1)(x^2+5)}$ C $\frac{-2x}{(x^2+1)(x^2+5)}$

D $\frac{-8x}{(x^2+1)}$ E $\frac{-2x}{(x^2+5)}$

20 **(3p)** Asimptota la graficul funcţiei f este:

A $y = 1$ asimptotă orizontală la $+\infty$ B $x = 0$ asimptotă verticală

C $y = e$ asimptotă orizontală la $-\infty$ D $y = e$ asimptotă orizontală la $+\infty$

E $y = 0$ asimptotă orizontală la $+\infty$ şi $-\infty$

21 **(3p)** Limita $\lim\limits_{x\to\infty} x^2 f(x)$ este egală cu:

A $+\infty$ B 4 C 2 D 1 E 0

Se consideră funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x^2+25} - \sqrt{x^2+4}$.

22 **(3p)** Derivata $f'(x)$, $x \in \mathbb{R}$, este:

A $x\frac{\sqrt{x^2+4}+\sqrt{x^2+25}}{\sqrt{x^2+4}\sqrt{x^2+25}}$ B $x^2\frac{\sqrt{x^2+4}-\sqrt{x^2+25}}{\sqrt{x^2+4}\sqrt{x^2+25}}$

C $2x\dfrac{\sqrt{x^2+4}-\sqrt{x^2+25}}{\sqrt{x^2+4}\sqrt{x^2+25}}$ D $2x\dfrac{\sqrt{x^2+4}+\sqrt{x^2+25}}{\sqrt{x^2+4}\sqrt{x^2+25}}$

E $x\dfrac{\sqrt{x^2+4}-\sqrt{x^2+25}}{\sqrt{x^2+4}\sqrt{x^2+25}}$

23 **(3p)** Imaginea funcţiei f este:

A $(9,33]$ B $(8,33]$ C $(0,3]$ D $(10,13]$ E $(-5,-1]$

24 **(3p)** Limita $\lim\limits_{x\to\infty} xf(x)$ este egală cu:

A $\dfrac{2}{3}$ B $\dfrac{21}{2}$ C 21 D 0 E $\dfrac{29}{2}$

---

25 **(3p)** Se consideră integrala $I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^n}{5x^2+x+1}\mathrm{d}x$, $n \in \mathbb{N}^*$. Limita $\lim\limits_{n\to\infty} nI_n$ este egală cu:

A $\dfrac{1}{7}$ B 0 C $\dfrac{1}{5}$ D $\dfrac{1}{6}$ E ∞

Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x}{(x^2+2)(x^2+4)}$.

26 **(3p)** Valoarea integralei $\displaystyle\int_0^1 \left(x^2+2\right)\cdot f(x)\,\mathrm{d}x$ este:

A $-\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{4}{5}$ B $\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{5}{4}$ C $\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{4}{5}$ D $-\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{5}{4}$ E $\dfrac{1}{2}\ln 20$

27 **(3p)** Limita $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x tf(t)\,\mathrm{d}t}{x^2}$ este egală cu:

A ∞ B 2 C $\frac{1}{2}$ D $-\infty$ E 0

28 **(3p)** Aria suprafeţei plane cuprinse între graficul funcţiei f, axa Ox şi dreptele de ecuaţii $x=0$ şi $x=1$ este:

A $\dfrac{1}{2}\ln 2+\frac{1}{3}\ln 3-\dfrac{1}{5}\ln 5$ B $\dfrac{1}{5}\ln 2+\dfrac{1}{3}\ln 3-\dfrac{1}{6}\ln 5$ C $\dfrac{1}{4}\ln 2+\dfrac{1}{4}\ln 3-\dfrac{1}{4}\ln 5$

D $\dfrac{1}{4}\ln 2+\dfrac{1}{4}\ln 3$ E $\dfrac{1}{4}\ln 3-\dfrac{1}{4}\ln 5$

Se consideră funcţia $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\ln(4x)-\dfrac{1}{x}$.

29 **(3p)** Ecuaţia tangentei la graficului funcţiei f în punctul de abscisă x_0, ştiind că această tangentă este paralelă cu dreapta $y=2x$, este:

A $y - \ln \frac{4}{e} = 2(x-1)$ B $y + \ln \frac{4}{e} = 2(x-1)$ C $y = 2x$

D $y - \ln \frac{4}{e} = 2(x+1)$ E $y + \ln \frac{4}{e} = 2(x+1)$.

30 **(3p)** Integrala $\int_1^e f(x)\mathrm{d}x$ este egală cu:

A $\ln(2e)$ B $2(e-1)\ln 4$ C $2\ln 2$ D $2(e-1)\ln 2$

E $2(e-2)\ln 2$

Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.

Soluţii

Model 3

1 Folosind relaţiile lui Viète, $S = 2m$, $P = m$. Din $S^2 - 3P = 0$, rezultă $4m^2 - 3m = 0$, de unde $m \in \left\{0, \frac{3}{4}\right\}$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{D}}$

2 Condiţia de existenţă a logaritmilor este $x > 0$. Cu notaţia $t := \log_3 x$, ecuaţia devine $t + \frac{t}{2} - 2t = \frac{3}{2}$, de unde obţinem $t = -3$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{A}}$

3 $T_{k+1} = C_{20}^k 3^{\frac{20-k}{5}} 2^{\frac{k}{2}}$, $k \vdots 2$ şi $k \vdots 5$, obţinem $k \in \{0, 10, 20\}$, adică 3 termeni.

Răspuns corect: $\boxed{\text{D}}$

4 $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x = \frac{1}{2}$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{C}}$

5 $\left[\left(\sqrt{8}+1\right)^2\right] = \left[9 + 2\sqrt{8}\right] = 9 + \left[2\sqrt{8}\right] = 9 + \left[\sqrt{32}\right]$. Cum $\sqrt{32} \in \left[\sqrt{25}, \sqrt{36}\right)$, rezultă că $\left[\left(\sqrt{8}+1\right)^2\right] = 14$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{A}}$

6 Condiţia este ca ecuaţia să aibă o singură soluţie, adică $\Delta = 0$. Obţinem $a = -\frac{1}{2}$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{A}}$

7 Dreapta BC are ecuaţia $x + y - 4 = 0$. Atunci $\text{dist}(A, BC) = \frac{|1 \cdot x_A + 1 \cdot y_A - 4|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = 0$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{D}}$

8 A_5^3.

Răspuns corect: $\boxed{\text{A}}$

9 Condiţia de perpendicularitate este $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$, de unde deducem $m \in \{-3, 3\}$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{A}}$

10 $\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right) \cdot \overrightarrow{CB} = 11$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{C}}$

11 Din condiţia $\Delta < 0$, deducem $m \in \left(-\infty, -\frac{1}{4}\right)$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{A}}$

12 $X(a) \cdot X(b) = X(a + b - 10ab)$, $\forall a,\ b \in \mathbb{R}$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{D}}$

13 Fie $X(a) \in G$ soluţie a ecuaţiei date. Obţinem $X(2a - 10a^2) = X\left(-\dfrac{12}{5}\right)$, prin urmare $2a - 10a^2 = -\dfrac{12}{5}$ şi obţinem două soluţii: $a_1 = \dfrac{3}{5}$, $a_2 = -\dfrac{2}{5}$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{A}}$

14 Dacă $a := \dfrac{1}{2} * \dfrac{1}{4} * \dfrac{1}{6} * \ldots * \dfrac{1}{2022}$, atunci $f(a) = f\left(\dfrac{1}{2}\right) \cdot f\left(\dfrac{1}{4}\right) \cdot \ldots \cdot f\left(\dfrac{1}{2022}\right) = \dfrac{1}{2023}$. Deci $\dfrac{1-a}{1+a} = \dfrac{1}{2023}$, de unde rezultă $a = \dfrac{1011}{1012}$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{C}}$

15 Valoarea determinantului matricei pătratice asociate sistemului este -7.

Răspuns corect: $\boxed{\text{A}}$

16 $\det(A) = 0$, $d_{\text{car}} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & -7 & 0 \\ 1 & -1 & \frac{4}{5} \end{vmatrix} = 0$, deci sistemul este compatibil simplu nedeterminat.

Răspuns corect: $\boxed{\text{C}}$

17 Din $f(-1) = 1 - a + b - c + 2 = 31$, rezultă $-a + b - c = 28$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{E}}$

18 Relaţia se rescrie $S_4 + \dfrac{S_3}{S_4} = 37$ şi, folosind relaţiile lui Viète, rezultă $c = -70$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{D}}$

19 $f'(x) = \dfrac{-8x}{(x^2+1)(x^2+5)}$, $x \in \mathbb{R}$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{A}}$

20 $y = 0$ asimptotă orizontală la $+\infty$ şi $-\infty$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{E}}$

21 $\lim\limits_{x\to\infty} x^2 \ln \dfrac{x^2+5}{x^2+1} = \lim\limits_{x\to\infty} \ln \left(\dfrac{x^2+5}{x^2+1}\right)^{x^2} = \lim\limits_{x\to\infty} \ln \left[\left(1 + \dfrac{4}{x^2+1}\right)^{\frac{x^2+1}{4}}\right]^{\frac{4x^2}{x^2+1}} = 4.$

Răspuns corect: $\boxed{\text{B}}$

22 $f'(x) = x\dfrac{\sqrt{x^2+4}-\sqrt{x^2+25}}{\sqrt{x^2+4}\sqrt{x^2+25}}$, $x \in \mathbb{R}$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{E}}$

23 Din studiul variaţiei funcţiei f, deducem că $\operatorname{Im} f = (0,3]$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{C}}$

24 $\lim\limits_{x\to\infty} xf(x) = \dfrac{21}{2}$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{B}}$

25 Cum $x^{n+1} \le x^n$, $\forall x \in [0,1]$ şi $\forall n \in \mathbb{N}^*$, deducem $\dfrac{x^{n+1}}{5x^2+x+1} \le \dfrac{x^n}{5x^2+x+1}$, $\forall x \in [0,1]$ şi $\forall n \in \mathbb{N}^*$, de unde, prin integrare pe $[0,1]$, rezultă $I_{n+1} \le I_n$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, adică $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ este descrescător.

Avem

$$5I_{n+2} + I_{n+1} + I_n = \frac{1}{n+1},\ \forall n \in \mathbb{N}^*. \tag{3}$$

Din $I_{n+2} \le I_n$, $I_{n+2} \le I_{n+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$ şi (3), rezultă $7I_{n+2} \le \dfrac{1}{n+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, deci $I_{n+2} \le \dfrac{1}{7(n+1)}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$ sau

$$I_n \le \frac{1}{7(n-1)},\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \ge 2. \tag{4}$$

Pe de altă parte, din $I_n \ge I_{n+2}$, $I_n \ge I_{n+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$ şi (3), obţinem $7I_n \ge \dfrac{1}{n+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$ sau

$$I_n \ge \frac{1}{7(n+1)},\ \forall n \in \mathbb{N}^*. \tag{5}$$

Aşadar, din (4) şi (5) avem pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $n \ge 2$

$$\frac{n}{7(n+1)} \le nI_n \le \frac{n}{7(n-1)}. \tag{6}$$

Trecând la limită cu $n \to \infty$ în (6), deducem cu criteriul cleştelui, $\lim\limits_{n\to\infty} nI_n = \dfrac{1}{7}$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{A}}$

26 $\displaystyle\int_0^1 (x^2+2)\cdot f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{x}{x^2+4}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\ln\frac{5}{4}$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{B}}$

27 $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\int\limits_0^x tf(t)\,\mathrm{d}t}{x^2} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{xf(x)}{2x} = 0.$

Răspuns corect: $\boxed{\text{E}}$

28 Aria $= \int\limits_0^1 |f(x)|\,\mathrm{d}x = \int\limits_0^1 \dfrac{x}{(x^2+2)(x^2+4)}\mathrm{d}x = \dfrac{1}{2}\int\limits_0^1 \dfrac{x}{x^2+2}\mathrm{d}x - \dfrac{1}{2}\int\limits_0^1 \dfrac{x}{x^2+4}\mathrm{d}x$

$= \dfrac{1}{4}\ln 2 + \dfrac{1}{4}\ln 3 - \dfrac{1}{4}\ln 5.$

Răspuns corect: $\boxed{\text{C}}$

29 Din condiţia $f'(x_0) = 2$ obţinem $x_0 = 1$, deci singurul punct de pe graficul funcţiei f, în care tangenta la grafic are panta 2 este $(1, f(1)) = (1, \ln\frac{4}{\mathrm{e}})$. Ecuaţia tangentei în $A(x_0, f(x_0))$ este $y - f(x_0) = f'(x_0)\cdot(x - x_0)$, deci ecuaţia cerută este $y - \ln\frac{4}{\mathrm{e}} = 2(x-1)$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{A}}$

30 $\int\limits_1^{\mathrm{e}} \left[\ln(4x) - \dfrac{1}{x}\right]\mathrm{d}x = 2(\mathrm{e}-1)\ln 2.$

Răspuns corect: $\boxed{\text{D}}$

Universitatea din Craiova
Facultatea de Automatică, Calculatoare şi Electronică
Examen de admitere la licenţă - Sesiunea iulie 2023
Domeniul Calculatoare şi Tehnologia Informaţiei
Proba scrisă la matematică

Model 4

---

1 **(3p)** Mulţimea soluţiilor reale ale ecuaţiei $\sqrt{1-x^2} = x+1$ este:

A $\{-1\}$ B $\{-1,0\}$ C $\{-1,0,1\}$ D $\{0\}$ E $\emptyset$

---

2 **(3p)** Se consideră progresia geometrică 1, 2, 2^2, 2^3, ... Suma primilor zece termeni este:

A 1000 B 1024 C 1023 D 1001 E 2000

---

3 **(3p)** Dacă x_1 şi x_2 sunt rădăcinile ecuaţiei $x^2+x+1=0$, atunci $\frac{x_1^2+x_2^2}{x_1x_2}$ este:

A -1 B 1 C 0 D i E $i\sqrt{3}$

---

4 **(3p)** Numărul submulţimilor formate numai cu numere pare ale mulţimii $\{0,1,2,3,4,5\}$ este:

A 8 B 6 C 64 D 7 E 32

---

5 **(3p)** Dacă suma coeficienţilor binomiali ai dezvoltării $(2^a+3b)^n$ este egală 1024, atunci n este:

A 3 B 0 C 12 D 9 E 10

---

6 **(3p)** În reperul cartezian xOy se consideră vectorii $\overrightarrow{AB} = 3\overrightarrow{i} + (m-1)\overrightarrow{j}$, $\overrightarrow{CD} = (n+1)\overrightarrow{i} + 4\overrightarrow{j}$, unde m, n sunt numere reale. Dacă $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$, atunci m şi n iau valorile:

A $m=1$, $n=-1$ B $m=5$, $n=2$ C $m=2$, $n=5$

D $m=2$, $n=0$ E $m=3$, $n=-2$

Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=|x+1|-|x-1|$.

7 **(3p)** Derivata în 0, $f'(0)$, este egală cu:

A 0 B 2 C 1 D -1 E ∞

8 **(3p)** Funcţia f este

A continuă pe $\mathbb{R}$ şi derivabilă pe $\mathbb{R}$ B continuă pe $\mathbb{R}\setminus\{-1,1\}$ şi derivabilă pe $\mathbb{R}\setminus\{-1,1\}$ C continuă pe $\mathbb{R}$ şi derivabilă pe $\mathbb{R}\setminus\{-1,1\}$ D continuă pe $\mathbb{R}$ şi derivabilă pe $\mathbb{R}\setminus\{-1,0,1\}$ E continuă pe $\mathbb{R}$ şi derivabilă pe $\mathbb{R}\setminus\{0\}$

9 **(3p)** Integrala $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$ este:

A 0 B 2 C $\frac{1}{2}$ D -1 E 1

---

10 **(3p)** Relativ la reperul cartezian ortonormat xOy, două puncte M_1 şi M_2 se deplasează în plan urmând traiectoriile $y = \log_2(3^x + 4^x)$ şi $y = \log_2 5^x$. Distanţa de la originea reperului la punctul de intersecţia al traiectoriilor este:

A 0 B 1 C $2\sqrt{1+\log_2^2 5}$ D $\log_2 5$ E -1

---

11 **(3p)** Dacă $\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, $x \in (0, \pi)$, atunci $\sin 2x$ este:

A 0 B $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ C $-\frac{1}{2}$ D $\frac{\sqrt{3}}{2}$ E $\frac{1}{2}$

---

12 **(3p)** Relativ la reperul cartezian ortonormat xOy, se dau punctele $A(1,0)$ şi $B(0,2)$. Aria triunghiului OAB este:

A 1 B $\frac{1}{2}$ C -1 D 2 E $\frac{3}{2}$

Se consideră polinomul cu coeficienţi reali $f = X^3 - 3X^2 + aX - 1$.

13 **(3p)** Valoarea lui $f(0)$ este:

A 1 B -1 C a D 0 E $a-3$

14 **(3p)** Dacă $X^2 - 2X + 1$ divide polinomul f, atunci valoarea lui a este:

A 3 B 2 C -2 D 0 E 1

15 **(3p)** Pentru $a = 3$, rădăcinile polinomului f sunt:

A $x_1 = 0,\ x_2 = x_3 = 1$ B $x_1 = -1,\ x_2 = 0,\ x_3 = 1$ C $x_1 = x_2 = x_3 = -1$
D $x_1 = x_2 = x_3 = 1$ E $x_1 = x_2 = -1,\ x_3 = 1$

Fie funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definită prin

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + x + 1 & \text{dacă} \quad x < 0 \\ e^{-x} & \text{dacă} \quad x \geq 0\,. \end{cases}$$

16 **(3p)** Limita $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ este:

A 0 B -1 C 1 D $\frac{1}{2}$ E e

17 **(3p)** Valoarea sumei $f_s'(0) + f_d'(0)$ este:

A 0 B 1 C -1 D e^{-1} E e

18 **(3p)** O primitivă F a funcţiei f pe $\mathbb{R}$ este:

A $F(x) = \begin{cases} \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + x & \text{dacă} \quad x < 0 \\ -e^{-x} & \text{dacă} \quad x \geq 0\,. \end{cases}$ B $F(x) = \begin{cases} x^2 + x + 1 & \text{dacă} \quad x < 0 \\ e^{-x} & \text{dacă} \quad x \geq 0\,. \end{cases}$

C $F(x) = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + x - e^{-x}$, $x \in \mathbb{R}$ D $F(x) = \begin{cases} \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + x + 2023 & \text{dacă} \quad x < 0 \\ -e^{-x} + 2024 & \text{dacă} \quad x \geq 0\,. \end{cases}$

E $F(x) = \begin{cases} \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + x + 2023 & \text{dacă} \quad x < 0 \\ -e^{-x} + 2023 & \text{dacă} \quad x \geq 0\,. \end{cases}$

Fie matricea $A = \begin{pmatrix} a & a & a \\ a & a & a \\ a & a & a \end{pmatrix}$, $a \in \mathbb{R}$.

19 **(3p)** Rangul matricei A este un număr din mulţimea:

A $\{1\}$ B $\{0, 1\}$ C $\{1, 2, 3\}$ D $\{0, 1, 2, 3\}$ E $\emptyset$

20 **(3p)** Pentru $a = 1$, matricea A^{2023} este egală cu:

A $3^{2023}A$ B $(3^{2022} - 1)\,A$ C A D $3^{2022}A$ E $3^{2024}A$

Se consideră funcţiile $f_1,\ f_2 : \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R}$,

$$f_1(x) = \frac{\sin x}{\sin x + \cos x}\,, \quad f_2(x) = \frac{\cos x}{\sin x + \cos x}\,.$$

21 **(3p)** Integrala $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} (f_1(x) + f_2(x))\,\mathrm{d}x$ este:

A 1 B 0 C $\frac{\pi}{2}$ D π E $\frac{\pi}{4}$

22 **(3p)** Integrala $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} (f_1(x) - f_2(x))\,\mathrm{d}x$ este:

A 0 B -1 C $\frac{\pi}{2}$ D 1 E $\ln\left(\frac{\pi}{2}\right)$

23 **(3p)** Integralele $I_1 = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} f_1(x)\mathrm{d}x$ şi $I_2 = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} f_2(x)\mathrm{d}x$ sunt egale cu:

A $I_1 = I_2 = \frac{\pi}{2}$ B $I_1 = I_2 = \frac{\pi}{4}$ C $I_1 = -\frac{\pi}{2},\ I_2 = \frac{\pi}{2}$

D $I_1 = 0,\ I_2 = \frac{\pi}{2}$ E $I_1 = \frac{\pi}{2},\ I_2 = 0$

Se consideră funcţia $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = x \ln^2 x$.

24 **(3p)** Numărul de asimptote ale graficului funcţiei f este egal cu:

A 1 B 2 C 3 D -1 E 0

25 **(3p)** Funcţia f are

A un punct de maxim local şi un punct de minim local

B două puncte de minim local C două puncte de maxim local

D niciun punct de extrem local E trei puncte de extrem local

26 **(3p)** Ecuaţia $f(x) = m$, unde $m \in \mathbb{R}$ are trei rădăcini reale distincte dacă

A $m \in \left(0, \frac{4}{e^2}\right)$ B $m \in (0, 1)$ C $m \in \left(\frac{4}{e^2}, +\infty\right)$

D $m \in \left(\frac{4}{e^2}, 1\right)$ E $m \in \left(0, \frac{4}{\sqrt{e}}\right)$

Fie sistemul de ecuaţii liniare $\begin{cases} x + y - z &= 1 \\ x - y + z &= -1 \\ -x + y + z &= 1 \end{cases}$.

27 **(3p)** Determinantul matricii sistemului este egal cu:

A -4 B 0 C 3 D 1 E -1

28 **(3p)** Soluţia sistemului liniar este:

A $(0, 0, 0)$ B $(1, -1, 1)$ C $(-1, 0, 1)$ D $(1, 1, 1)$ E $(0, 1, 0)$

---

29 **(3p)** Dacă în triunghiul ABC se cunosc lungimile laturilor $BC = 13$, $AB = 12$, $AC = 5$, atunci $\sin B$ este:

A 1 B $\frac{5}{13}$ C $\frac{12}{13}$ D 0 E -1

---

30 **(3p)** Vârful parabolei asociate funcţiei de gradul doi $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = -x^2 + 2x - 1$ este:

A $V(1, 1)$ B $V(0, 0)$ C $V(1, -1)$ D $V(1, 0)$ E $V(0, 1)$

Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.

Soluţii

Model 4

1 Condiţia de existenţă a radicalului de ordin doi este: $1 - x^2 \geq 0 \Leftrightarrow x \in [-1, 1]$. Prin ridicare la pătrat obţinem ecuaţia $2x^2 + 2x = 0$, cu soluţiile $x_1 = -1$, $x_2 = 0$. Ambele sunt în $[-1, 1]$ şi verifică ecuaţia dată.

Răspuns corect: $\boxed{\text{B}}$

2 Progresia geometrică are primul termen egal cu 1 şi raţia 2. Atunci suma primilor 10 termeni este $S_{10} = 1 \cdot \frac{2^{10}-1}{2-1} = 1023$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{C}}$

3 Folosind relaţiile lui Viète, $S = x_1 + x_2 = -1$, $P = x_1x_2 = 1$, rezultă că $\frac{x_1^2+x_2^2}{x_1x_2} = \frac{S^2-2P}{P} = -1$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{A}}$

4 Există exact 7 submulţimi formate cu numere pare al mulţimii date: $\{0\}$, $\{2\}$, $\{4\}$, $\{0, 2\}$, $\{0, 4\}$, $\{2, 4\}$, $\{0, 2, 4\}$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{D}}$

5 Suma coeficienţilor binomiali ai dezvoltării este $2^n = 1024$, adică $n = 10$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{E}}$

6 Din $3 = n + 1$ şi $m - 1 = 4$ rezultă că $m = 5$, $n = 2$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{B}}$

7 Prin explicitarea modulelor se obţine că $f(x) = \begin{cases} -2 & \text{dacă } x \in (-\infty, -1) \\ 2x & \text{dacă } x \in [-1, 1) \\ 2 & \text{dacă } x \in [1, +\infty) \end{cases}$.

Atunci f este derivabilă în 0 şi $f'(0) = 2$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{B}}$

8 Funcţia f este continuă pe $\mathbb{R}$ şi derivabilă pe $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$, iar derivata lui f este $f'(x) = \begin{cases} 0 & \text{dacă } x \in (-\infty, -1) \\ 2 & \text{dacă } x \in (-1, 1) \\ 0 & \text{dacă } x \in (1, +\infty) \end{cases}$, punctele -1 şi 1 fiind puncte unghiulare.

Răspuns corect: $\boxed{\text{C}}$

9 $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 2x\mathrm{d}x = 1.$

Răspuns corect: $\boxed{\text{E}}$

10 Abscisa punctului de interseţie este soluţia unică a ecuaţiei $3^x + 4^x = 5^x$, adică $x = 2$. Rezultă că $M(2, 2\log_2 5)$ este punctul de interseţie al traiectoriilor şi atunci distanţa de la O la M este $2\sqrt{1 + \log_2^2 5}$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{C}}$

11 Avem $\sin x = \frac{1}{2}$ şi atunci $\cos 2x = 2\sin x \cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{B}}$

12 Aria triunghiului este egală cu $\frac{1}{2} \cdot OA \cdot OB = 1$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{A}}$

13 Valoarea lui $f(0)$ este -1.

Răspuns corect: $\boxed{\text{B}}$

14 Cum restul împărţirii polinomului f la $X^2 - 2X + 1 = (X-1)^2$ trebuie să fie egal cu 0, se obţine că $a = 3$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{A}}$

15 Pentru $a = 3$, polinomul f devine $(X-1)^3$ şi atunci 1 este rădăcină triplă.

Răspuns corect: $\boxed{\text{D}}$

16 Cum $\lim\limits_{x \nearrow 0} f(x) = 1$ şi $\lim\limits_{x \searrow 0} f(x) = 1$, rezultă $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 1$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{C}}$

17 Cum $f_s'(0) = \lim\limits_{x \nearrow 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = 1$ şi $f_d'(0) = \lim\limits_{x \searrow 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = -1$, rezultă că $f_s'(0) + f_d'(0) = 0$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{A}}$

18 Din definiţia unei primitive rezultă că aceasta este o funcţie derivabilă pe $\mathbb{R}$ şi prin urmare continuă în $x = 0$. Atunci variantele A şi E se exclud şi prin derivarea lui F rămane doar varianta D.

Răspuns corect: $\boxed{\text{D}}$

19 Rangul matricei poate fi 0, pentru $a = 0$, sau 1, pentru $a \neq 0$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{B}}$

20 Pentru $a = 1$, $A^2 = 3A$, $A^3 = 3^2 A$ şi atunci $A^{2023} = 3^{2022} A$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{D}}$

21 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} (f_1(x) + f_2(x))\,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}.$

Răspuns corect: $\boxed{\text{C}}$

22 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} (f_1(x) - f_2(x))\,\mathrm{d}x = -\ln(\sin x + \cos x)\big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 0.$

Răspuns corect: $\boxed{\text{A}}$

23 Cum $I_1 + I_2 = \frac{\pi}{2}$ şi $I_1 - I_2 = 0$, rezulă că $I_1 = I_2 = \frac{\pi}{4}$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{B}}$

24 Cum $\lim\limits_{x \searrow 0} f(x) = 0$, $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$ şi $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \infty$, rezultă că graficul lui f nu are nici o asimptotă.

Răspuns corect: $\boxed{\text{E}}$

25 Derivata funţiei f, $f^{'}(x) = \ln x(\ln x + 2)$, $x \in (0, +\infty)$, are două zerouri, $x_1 = 1$ şi $x_2 = \frac{1}{e^2}$, din care unul este punct de maxim local şi unul este punct de minim local.

Răspuns corect: $\boxed{\text{A}}$

26 Din taboul de variaţie al funcţiei f şi din graficul lui f se deduce că intersecţia dintre graficul lui f şi dreapta orizontală $y = m$ are trei puncte de intersecţie distincte dacă şi numai dacă $0 < m < \frac{4}{e^2}$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{A}}$

27 Determinantul matricii este egal cu -4.

Răspuns corect: $\boxed{\text{A}}$

28 Soluţia unică a sistemului liniar este $(0, 1, 0)$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{E}}$

29 Întrucât $5^2 + 12^2 = 13^2$, rezultă că triunghiul ABC este dreptunghic în A şi atunci $\sin B = \frac{AC}{BC} = \frac{5}{13}$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{B}}$

30 Vârful parabolei are coordonatele $x_V = -\frac{b}{2a} = 1$ şi $y_V = -\frac{\Delta}{4a} = 0$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{D}}$

Universitatea din Craiova
Facultatea de Automatică, Calculatoare şi Electronică
Examen de admitere la licenţă - Sesiunea iulie 2023
Domeniul Calculatoare şi Tehnologia Informaţiei
Proba scrisă la matematică

Model 5

---

1 **(3p)** Fie numărul complex $z = 1 - i$. Atunci $(z-1)^{2023}$ este:

A -1 B 0 C $-i$ D i E 1

---

2 **(3p)** Se consideră progresia aritmetică $a_n = n - 4$, $n \in \mathbb{N}^*$. Suma primilor zece termeni este:

A 10 B 15 C 0 D -10 E 30

---

3 **(3p)** Ecuaţia $4^x - 2^{x+1} - 8 = 0$ are rădăcinile:

A $-2, 4$ B 4 C $0, 2$ D $0, 4$ E 2

---

4 **(3p)** Suma $S = C_n^0 + 2C_n^1 + 4C_n^2 + \cdots + 2^n C_n^n$, $n \in \mathbb{N}$, este:

A 2^{2n} B 1 C 2^n D 3^n E 3^{2n}

---

5 **(3p)** Ecuaţia dreptei care trece prin punctul $A(1,-1)$ şi este perpendiculară pe dreapta de ecuaţie $x + y - 2 = 0$ este:

A $x - y + 2 = 0$ B $x + y + 2 = 0$ C $x - y - 2 = 0$

D $2x - y + 2 = 0$ E $x + y - 2 = 0$

---

6 **(3p)** Funţia de gradul doi $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax^2 + bx + c$, al cărei grafic conţine punctele $A(-1,0)$, $B(1,2)$ şi originea O a reperului cartezian xOy este:

A $f(x) = x^2 + x + 1$ B $f(x) = x^2 + x - 1$ C $f(x) = x^2 + x$

D $f(x) = 2x^2 + x + 1$ E $f(x) = 2x^2 - x + 1$

---

7 **(3p)** Relativ la reperul cartezian ortonormat xOy, două puncte M_1 şi M_2 se deplasează în plan urmând traiectoriile rectilinii $d_1 : y = 2x + 1$ şi $d_2 : y = 5x - 2$. Atunci punctul de intersecţie al traiectoriilor, $d_1 \cap d_2 = \{M\}$, este:

A $M(1,1)$ B $M(-1,0)$ C $M(1,3)$ D $M(0,0)$ E $M(3,1)$

---

8 **(3p)** Media geometrică a numerelor $\sqrt{5+\sqrt{5}}$ şi $\sqrt{5-\sqrt{5}}$ este:

A $\sqrt[4]{20}$ B $2\sqrt{5}$ C $\sqrt[4]{5}$ D $\sqrt{5}$ E 1

Se consideră funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x+2}{x^2+x+1}$.

9 **(3p)** Limita $\lim\limits_{x\to\infty} xf(x)$ este:

A $+\infty$ B 0 C -1 D 1 E $-\infty$

10 **(3p)** Derivata funcţiei f este:

A $f'(x) = -\frac{x^2+4x+1}{(x^2+x+1)^2}$ B $f'(x) = -\frac{x^2+1}{(x^2+x+1)^2}$ C $f'(x) = -\frac{x^2+4x+1}{x^2+x+1}$

D $f'(x) = \frac{x^2+4x+1}{(x^2+x+1)^2}$ E $f'(x) = -\frac{1}{(x^2+x+1)^2}$

11 **(3p)** Integrala $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$ este:

A 0 B $\ln 2$ C $\sqrt{2}$ D $2\ln 5$ E $\ln\sqrt{3} + \frac{\pi\sqrt{3}}{6}$

---

12 **(3p)** Dacă $\sin x = \frac{5}{13}$, $x \in (0, \frac{\pi}{2})$, atunci $\sin 2x + \cos 2x$ este:

A 0 B $\frac{239}{169}$ C $\frac{144}{169}$ D $-\frac{5}{13}$ E $\frac{1}{2}$

---

13 **(3p)** Dacă $BC = 10$, $AB = 6$ şi $AC = 8$, atunci raza cercului circumscris triunghiului ABC este:

A 6 B $\frac{5}{2}$ C -1 D 1 E 5

Se consideră polinomul cu coeficienţi reali $f = X^3 - X^2 - X + 1$ cu rădăcinile x_1, x_2, x_3.

14 **(3p)** Câtul q şi restul r al împărţirii lui f la polinomul $g = X + 1$ sunt:

A $q = (X-1)^2$, $r = 1$ B $q = X - 1$, $r = 0$ C $q = (X-1)^2$, $r = 0$

D $q = (X-1)^2$, $r = X + 1$ E $q = (X-1)^2$, $r = (X + 1^2)$

15 **(3p)** Rădăcinile polinomului f sunt:

A $x_1 = -1$, $x_2 = x_3 = 1$ B $x_1 = -1$, $x_2 = 0$, $x_3 = 1$ C $x_1 = x_2 = x_3 = 1$

D $x_1 = x_2 = x_3 = -1$ E $x_1 = -1$, $x_2 = 1 + i$, $x_3 = 1 - i$

16 **(3p)** Suma $S = x_1^{2023} + x_2^{2023} + x_3^{2023}$ este:

A -1 B 0 C $2i$ D 1 E $-2i$

Fie funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definită prin

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + x + a & \text{dacă} \quad x < 0 \\ \frac{e^x}{x+1} & \text{dacă} \quad x \geq 0 \end{cases}, \text{ unde } a \in \mathbb{R}.$$

17 **(3p)** Funcţia f este continuă dacă şi numai dacă valoarea lui a este:

A e B 2 C -1 D 1 E 0

18 **(3p)** Pentru $a = 1$, valoarea sumei $S = f'\left(-\frac{1}{2}\right) + f'_s(0) + f'_d(0)$ este:

A -1 B 1 C 0 D e E e

Fie matricea $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ m & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, unde $m \in \mathbb{R}$.

19 **(3p)** Dacă $\det A = 0$, atunci m este:

A 2 B 1 C 0 D $\frac{1}{2}$ E 3

20 **(3p)** Pentru $m = 1$, inversa matricii A este:

A $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ B $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ C $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -1 & \frac{3}{2} \\ 1 & -1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$

D $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ -1 & -1 & 1 \\ \frac{3}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$ E $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

Se consideră funcţia $f : \mathbb{R} \setminus \{-1\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x-1}{x+1}$.

21 **(3p)** Ecuaţiile asimptotelor la graficul funcţiei f sunt:

A $x = -1$, $y = x + 1$ B $x = -1$, $y = x$ C $x = 1$, $y = 1$

D $x = -1$, $y = 1$ E $x = -1$, $y = 0$

22 **(3p)** Integrala $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$ este:

A 1 B $1 - 2\ln 2$ C $1 - \ln 2$ D $1 + 2\ln 2$ E $\ln 2$

23 **(3p)** Derivata inversei funcţiei f în punctul -1, $\left(f^{-1}\right)'(-1)$, este egală cu:

A 1 B 2 C 0 D -1 E $\frac{1}{2}$

Se consideră funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x + e^{-x}$.

24 **(3p)** Dacă m este numărul de asimptote ale graficului funcţiei f şi n este numărul de puncte de extrem ale funcţiei f, atunci $m + n$ este egal cu:

A 4 B 0 C 1 D 2 E 3

25 **(3p)** Funcţia $f : \mathbb{R} \to [1, +\infty)$, $f(x) = x + e^{-x}$ este

A bijectivă B surjectivă, dar nu injectivă C injectivă, dar nu surjectivă

D nici injectivă, nici surjectivă E inversabilă

26 **(3p)** Ecuaţia $f(x) = m$, unde $m \in \mathbb{R}$ are două răcini reale distincte dacă

A $m \in (0,1)$ B $m < 1$ C $m > 1$ D $m \geq 1$ E $m = 1$

Fie funcţia $f : D \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x-1}{\sqrt{x^2-1}}$, $D \subseteq \mathbb{R}$.

27 **(3p)** Domeniul maxim de definiţie al lui f:

A $(-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$ B $\mathbb{R}$ C $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$

D $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$ E $(-1, 1)$

28 **(3p)** Limita $\lim\limits_{a \to \infty} \int\limits_{a+1}^{a+2} f(x)\sqrt{x^2-1}\, dx$ este:

A 0 B 1 C $-\infty)$ D -1 E $+\infty$

---

29 **(3p)** Relativ la baza ortonormaă $\{\vec{i}, \vec{j}\}$ a reperului cartezian xOy, se consideră vectorii $\vec{a} = 3\vec{i} + (m+1)\vec{j}$, $\vec{b} = -2\vec{i} + \vec{j}$, unde $m \in \mathbb{R}$. Dacă vectorii $\vec{a}$ şi $\vec{b}$ sunt ortogonali, atunci m ia valoarea:

A 5 B 0 C $-\frac{5}{2}$ D 0 E $\frac{1}{2}$

---

30 **(3p)** Mulţimea soluţiilor reale ale ecuaţiei $\sqrt{x - x^2} = 1 - x$ este::

A $\{\frac{1}{2}, 1\}$ B $\{0, 1\}$ C $\{1\}$ D $\{-1, 1\}$ E

Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.

Soluţii

Model 5

1 Cum $z-1=-i$ rezultă că $(z-1)^{2023}=(-i)^{2023}=-i^3=i$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{D}}$

2 Progresia aritmetică are primul termen egal cu -3 şi raţia 1. Atunci suma primilor 10 termeni este $S_{10}=\frac{(-6+9\cdot 1)\cdot 10}{2}=15$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{B}}$

3 După substituţia $2^x=t$, ecuaţia $4^x-2^{x+1}-8=0$ devine $t^2-2t-8=0$, cu rădăcinile $t_1=-2$, $t_2=4$. Rezultă $x=2$ soluţie unică.

Răspuns corect: $\boxed{\text{E}}$

4 Folosind binomul lui Newton, suma este egală cu $(1+2)^n=3^n$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{D}}$

5 Panta dreptei $x+y-2=0$ este -1 şi atunci panta dreptei cerute este 1. Rezultă că aceasta are ecuaţia $y-(-1)=1\cdot(x-1)$ sau $x-y-2=0$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{C}}$

6 Din $f(0)=0$, $f(-1)=0$ şi $f(1)=2$, rezultă că $a=b=1$, $c=0$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{C}}$

7 Din $2x+1=5x-2$ rezultă $x=1$ şi atunci $y=3$, adică $M(1,3)$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{D}}$

8 Media geometrică a numerelor este $\sqrt{\sqrt{5+\sqrt{5}}\cdot\sqrt{5-\sqrt{5}}}=\sqrt[4]{20}$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{A}}$

9 $\lim\limits_{x\to\infty} xf(x)=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2+2x)}{x^2+x+1}=1$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{D}}$

10 $f'(x)=\frac{x^2+x+1-(x+2)(2x+1)}{(x^2+x+1)^2}=-\frac{x^2+4x+1}{(x^2+x+1)^2}$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{A}}$

11 $$\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_0^1\frac{(x^2+x+1)'}{x^2+x+1}\mathrm{d}x+\frac{3}{2}\int_0^1\frac{1}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{\sqrt{3}}{2}}\mathrm{d}x=$$
$$=\tfrac{1}{2}\ln(x^2+x+1)\big|_0^1+\sqrt{3}\arctan\left(\tfrac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)\Big|_0^1=\ln\sqrt{3}+\tfrac{\pi\sqrt{3}}{6}.$$

Răspuns corect: $\boxed{\text{E}}$

12 Avem $\sin 2x + \cos 2x = 2\sin x\cos x + 2\cos^2 x - 1 = \frac{239}{169}$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{B}}$

13 Raza cercului circumscris triunghiului dreptunghic ABC este $R = \frac{BC}{2} = 5$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{E}}$

14 Câtul împărţirii lui f la polinomul $g = X + 1$ este $q = X^2 - 2X + 1 = (X-1)^2$, iar restul $r = 0$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{C}}$

15 Cum $f = (X+1)(X-1)^2$, rezultă că rădăcinile lui f sunt $x_1 = -1$, $x_2 = x_3 = 1$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{A}}$

16 Suma cerută este egală cu 1.

Răspuns corect: $\boxed{\text{D}}$

17 Cum $\lim\limits_{x\nearrow 0} f(x) = a$, $\lim\limits_{x\searrow 0} f(x) = 1$ şi $f(0) = 1$, rezultă că $a = 1$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{D}}$

18 Din $f'\left(-\frac{1}{2}\right) = 0$, $f'_s(0) = 1$ şi $f'_d(0) = 0$, rezultă că suma cerută este egală cu 1.

Răspuns corect: $\boxed{\text{B}}$

19 Determinantul matricei A este $4 - 2m$ şi atunci $\det A = 0 \Leftrightarrow m = 2$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{A}}$

20 Pentru $m = 1$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\det A = 2$ şi $A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot A^* = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -1 & \frac{3}{2} \\ 1 & -1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{C}}$

21 Cum $\lim\limits_{x\pm\infty} f(x) = 1$ şi $\lim\limits_{x\nearrow -1} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\searrow -1} f(x) = -\infty$, rezultă că $y = 1$ este asimptotă orizontală la $\pm\infty$, $x = -1$ este asimptotă verticală la stânga către $+\infty$, $x = -1$ este asimptotă verticală la dreapta către $-\infty$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{D}}$

22 $\displaystyle\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 \mathrm{d}x - 2\int_0^1 \frac{1}{x+1}\mathrm{d}x = 1 - 2\ln 2.$

Răspuns corect: $\boxed{\text{B}}$

23 Cum $f:(-1,+\infty)\to(-\infty,1)$ este o funcţie inversabilă şi derivabilă, iar $f(0)=-1$ şi $f^{'}(0)=2\neq 0$, rezultă că inversa $f^{-1}:(-\infty,1)\to(-1,+\infty)$ este derivabilă în punctul -1 şi $\left(f^{-1}\right)^{'}(-1)=\frac{1}{f^{'}(0)}=\frac{1}{2}$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{E}}$

24 Cum f este continuă pe $\mathbb{R}$, $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=\infty$, dar $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=1$, $\lim\limits_{x\to\infty}(f(x)-x)=0$, $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=-\infty$ rezultă că graficul lui f doar o asimptotă, mai precis $y=x$ asimptotă oblică la ∞. Derivata lui f, $f^{'}(x)=1-e^{-x}$, $x\in\mathbb{R}$, are un singur zerou, $x=0$, care este unicul punct de extrem (punct de minim global). Deci $m=1$ şi $n=1$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{D}}$

25 Din tabloul de variaţie al funcţiei $f:\mathbb{R}\to[1,+\infty)$ se trage concluzia că funţia f este surjectivă, dar nu este injectivă.

Răspuns corect: $\boxed{\text{B}}$

26 Din tabloul de variaţie al funcţiei f şi din graficul lui f se deduce că intersecţia dintre graficul lui f şi dreapta orizontală $y=m$ are două puncte de intersecţie distincte dacă şi numai dacă $m>1$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{C}}$

27 Condiţia de existenţă a radicalului la numitor: $x^2-1>0$ implică $D=(-\infty,-1)\cup(1,\infty)$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{C}}$

28 Cum $\int\limits_{a+1}^{a+2} f(x)\sqrt{x^2-1}\,dx=\int\limits_{a+1}^{a+2}(x-1)\,dx=\left(\frac{x^2}{2}-x\right)\Big|_{a+1}^{a+2}=a+\frac{1}{2}$, rezultă că limita este egală cu $+\infty$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{E}}$

29 Condiţia de ortogonalitate este: $\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}=0\Leftrightarrow 3\cdot(-2)+(m+1)\cdot 1=0\Leftrightarrow m=5$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{A}}$

30 Condiţiile de existenţă $x-x^2\geq 0$ şi $1-x\geq 0$ înseamnă că soluţiile sunt în intervalul $[0,1]$. Prin ridicarea la pătrat a ecuaţiei date, rezultă ecuaţia $2x^2-3x+1=0$, cu rădăcinile $x_1=\frac{1}{2}$, $x_2=1$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{A}}$

Universitatea din Craiova
Facultatea de Automatică, Calculatoare şi Electronică
Examen de admitere la licenţă - Sesiunea iulie 2023
Domeniul Calculatoare şi Tehnologia Informaţiei
Proba scrisă la matematică

Model 6

---

1 **(3p)** Dacă punctul $M(-1, m)$ aparţine graficului funcţiei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - x$, atunci numărul real m este:

A -2 B 1 C 0 D -1 E 2

---

2 **(3p)** Modulul numărului complex $z = \left[\left(\sqrt{7} - 1\right) + i\left(\sqrt{7} + 1\right)\right]^{2019}$ este

A 4^{2023} B 2^{2023} C 7 D 0 E $\sqrt{7}^{\,2023}$

---

3 **(3p)** Mulţimea soluţiilor ecuaţiei $25^x + 35^x = 2 \cdot 49^x$ este:

A $\{2\}$ B $\{0\}$ C $\{0, 1\}$ D $\{1\}$ E $\{0, 2\}$

---

4 **(3p)** Cel mai mare termen al dezvoltării $\left(\frac{1}{2} + \frac{3}{4}\right)^{1000}$ este:

A T_{598} B T_{600} C T_{599} D T_{1001} E T_1

---

5 **(3p)** Dacă x_1, x_2, x_3 sunt rădăcinile ecuaţiei $x^3 - 2x^2 + 2x + 17 = 0$, atunci suma $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$ este:

A 1 B 4 C 2 D 0 E -2

---

6 **(3p)** Relativ la reperul cartezian ortonormat xOy, se consideră punctele $A(1, 0)$, $B(1, 1)$, $C(0, 1)$. Dacă punctul B este atât mijlocul segmentului AA' cât şi mijlocul segmentului CC', atunci punctele A' şi C' sunt:

A $A'(1, 2)$, $C'(2, 1)$ B $A'(1, -1)$, $C'(-1, 1)$ C $A'(2, 2)$, $C'(2, 1)$

D $A'(1, 2)$, $C'(2, 2)$ E $A'(-1, 2)$, $C'(2, -1)$

---

7 **(3p)** Fie triunghiul ABC pentru care avem $\sin(A + B) + \cos C = 1$. Atunci unghiul C are masura egală cu:

A $45°$ B $90°$ C $60°$ D $30°$ E $120°$

---

8 **(3p)** Pe mulţimea numerelor complexe $\mathbb{C}$ se consideră legea de compoziţie:

$$z_1 * z_2 = z_1 z_2 + z_1 + z_2 \text{ pentru orice } z_1, z_2 \in \mathbb{C}\,.$$

Atunci determinaţi răspunsul unic corect dintre variantele:

A elementul neutru este -1 B $z * (-1) = -1$, pentru orice $z \in \mathbb{C}$

C toate elementele sunt simetrizabile D elementul neutru este 1

E $(\mathbb{C}, *)$ este grup comutativ

Se consideră funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} \cos\frac{1}{x} & \text{dacă} \quad x < 0 \\ 0 & \text{dacă} \quad x = 0 \\ e^{-\frac{1}{x}} & \text{dacă} \quad x > 0 \end{cases}$.

9 **(3p)** Limita $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ este:

A 0 B $+\infty$ C nu există D e E $-\infty$

10 **(3p)** Funcţia f este

A continuă pe $\mathbb{R}$ şi derivabilă pe $\mathbb{R}$ B continuă pe $\mathbb{R}$ şi derivabilă pe $\mathbb{R} \setminus \{0\}$

C continuă pe $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ şi derivabilă pe $\mathbb{R} \setminus \{-1, 0, 1\}$ D continuă pe $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ şi derivabilă pe $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ E continuă pe $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ şi derivabilă pe $\mathbb{R}$

11 **(3p)** Limita $\lim\limits_{a\to 0} \int_1^a \frac{1}{x} e^{-\frac{1}{x}} \mathrm{d}x$ este:

A 0 B 1 C $\frac{1}{e}$ D $1 - e$ E $\frac{1-e}{e}$

---

12 **(3p)** Dacă $\sin a = \frac{1}{2}$ şi $a \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, atunci $\dfrac{\sin a + \sqrt{3}\cos a}{\sin a - 2\sqrt{3}\cos a}$ este:

A $\frac{1}{2}$ B $-\frac{1}{\sqrt{3}}$ C $-\frac{4}{5}$ D $-\frac{2}{5}$ E 0

---

13 **(3p)** Dacă $BC = 10$, $AB = 6$ şi $AC = 8$, atunci raza cercului înscris în triunghiul ABC este:

A $\frac{1}{2}$ B 1 C 2 D 3 E $\frac{3}{2}$

Fie matricea

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \omega & \omega^2 \\ 1 & \omega^2 & \omega \end{pmatrix},$$

unde ω este una dintre rădăcinile complexe ale ecuaţiei $x^3 - 1 = 0$.

14 **(3p)** Determinantul matricei A este:

A 1 B ω C $3\omega(\omega - 1)$ D $\omega^2 - \omega$ E -1

15 **(3p)** Matricea A^2 este egală cu:

A $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$ B $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ C $\begin{pmatrix} \omega & 0 & 0 \\ 0 & \omega^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

D $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \omega & 0 \\ 0 & 0 & \omega^2 \end{pmatrix}$ E $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

16 **(3p)** Pentru orice $n \in \mathbb{N}$, matricea A^{2n} este:

A egală cu A^2 B egală cu A^4 C egală cu A

D o matrice cu toate elementele numere reale E egală cu $I_3 - A$

Fie funcţia $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \ln x - \dfrac{1}{x}$, pentru orice $x > 0$.

17 **(3p)** Valoarea lui $f(1)$ este:

A 1 B $-\frac{1}{e}$ C -1 D 1 E 0

18 **(3p)** Imaginea intervalului $(0, +\infty)$ prin funcţia f, $Im\, f = f\left((0, +\infty)\right)$ este:

A $(0, +\infty)$ B $(1, +\infty)$ C $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ D $\mathbb{R}$ E $(0, 1)$

19 **(3p)** Integrala $\displaystyle\int_1^e x f(x)\, \mathrm{d}x$ este:

A $\frac{e-1}{4}$ B $\frac{e^2+e}{2}$ C $\frac{e^2}{2}$ D $\frac{e^2-3e}{4}$ E $\frac{e^2-4e+5}{4}$

Fie matricea $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.

20 **(3p)** Determinantul matricii A este:

A $a_1a_2a_3$ B $(a_2 + a_1)(a_3 + a_1)(a_3 + a_2)$ C $(a_2 - a_1)(a_3 - a_1)(a_3 - a_2)$

D $a_1 + a_2 + a_3$ E $a_1a_2 + a_2a_3 + a_3a_1$

21 **(3p)** Dacă A^t notează transpusa matricii A, atunci determinantul matricii AA^t este:

A $(a_1a_2 + a_2a_3 + a_3a_1)^2$ B $(a_1 + a_2 + a_3)^2$ C $a_1^2a_2^2a_3^2$

D $(a_2 - a_1)^2(a_3 - a_1)^2(a_3 - a_2)^2$ E 1

---

22 **(3p)** Dacă $a_1 = -1$, $a_2 = 0$, $a_3 = 1$, atunci mulţimea soluţiilor sistemului liniar omogen de matrice A este:

A $\{(1, 1, 1)\}$ B $\{(0, 0, 0)\}$ C $\{(a, a, a)\,|a \in \mathbb{R}\}$

D $\{(-1, 0, 1)\}$ E $\{(a, -a, a)\,|a \in \mathbb{R}\}$

Se consideră funcţia $f : D \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{1}{x^2 + x + 1}$.

23 **(3p)** Domeniul de definiţie D al funcţiei este:

A $\mathbb{R}$ B $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ C $(0, +\infty)$ D $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$ E $(-1, +\infty)$

24 **(3p)** Derivata funcţiei f este:

A $f'(x) = -\frac{1}{(x^2+x+1)^2}$ B $f'(x) = -\frac{x}{(x^2+x+1)^2}$ C $f'(x) = -\frac{2x+1}{(x^2+x+1)^2}$

D $f'(x) = \frac{x+1}{x^2+x+1}$ E $f'(x) = -\frac{2x+1}{x^2+x+1}$

25 **(3p)** Integrala $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$ este:

A $\frac{\pi}{\sqrt{3}}$ B $\frac{\pi}{3}$ C π D $\frac{1}{\sqrt{3}}$ E $\frac{\pi}{3\sqrt{3}}$

Pentru fiecare număr natural n, se consideră numărul real

$$I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{x^2+1}\mathrm{d}x\,.$$

26 **(3p)** Valorile integralelor I_0 şi I_1 sunt:

A $I_0 = \frac{\pi}{2}$, $I_1 = \ln\sqrt{2}$ B $I_0 = \frac{\pi}{4}$, $I_1 = \ln 2$ C $I_0 = \frac{\pi}{4}$, $I_1 = \ln\sqrt{2}$

D $I_0 = \frac{\pi}{4}$, $I_1 = \sqrt{2}$ E $I_0 = \pi$, $I_1 = \ln 2$

27 **(3p)** Pentru orice $n \geq 2$, suma $I_{n-2} + I_n$ este egală cu:

A $\frac{1}{n+1}$ B $\frac{1}{n}$a C $\frac{2}{n-1}$ D $\frac{1}{n+2}$ E $\frac{1}{n-1}$

28 **(3p)** Şirul de numere reale $(I_n)_n$ verifică:

A $\frac{n}{2(n+1)} \leq I_n \leq \frac{n}{2(n-1)}$, $\forall n \geq 2$ B $\frac{1}{2(n+1)} \leq I_n \leq \frac{1}{2(n-1)}$, $\forall n \geq 2$

C $\frac{1}{n+1} \leq I_n \leq \frac{1}{n-1}$, $\forall n \geq 2$ D $0 \leq I_n \leq \frac{1}{2n}$, $\forall n \geq 2$ E $\frac{1}{2n} \leq I_n \leq \frac{1}{n}$, $\forall n \geq 2$

Fie funcţia $f : \mathbb{R} \setminus \{-1, 0\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}$.

29 **(3p)** Asimptotele graficului funcţiei f au ecuaţiile:

A $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$ B $x = 0$, $y = 0$ C $x = -1$, $x = 0$, $y = 1$

D $x = -1$, $x = 0$, $y = 0$ E $x = -1$, $x = 0$

30 **(3p)** Ecuaţia $f(x) = m$ are exact o rădăcină reală dacă şi numai dacă:

A $m \in [-4, 0]$ B $m = -4$ C $m \in (-\infty, -4]$

D $m \in (0, +\infty)$ E $m \in (-4, 0]$

Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.

Soluţii

Model 6

1 Din $f(-1) = m$ rezultă că $m = 2$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{E}}$

2 Modulul lui $z = \left[\left(\sqrt{7}-1\right) + i\left(\sqrt{7}+1\right)\right]^{2019}$ este $\left|\left(\sqrt{7}-1\right) + i\left(\sqrt{7}+1\right)\right|^{2023} = 4^{2023}$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{A}}$

3 După împărţirea cu 7^x şi folosind substituţia $\left(\frac{5}{7}\right)^x = t$, ecuaţia devine $t^2 + t - 2 = 0$, cu rădăcinile $t_1 = -2$, $t_2 = 1$. Cum $t > 0$, rezultă că $\left(\frac{5}{7}\right)^x = 1$ şi $x = 0$ este soluţie unică.

Răspuns corect: $\boxed{\text{B}}$

4 Termenul de rang $k+1$ al dezvoltării $\left(\frac{1}{2} + \frac{3}{4}\right)^{1000}$ este $T_{k+1} = C_{1000}^k \left(\frac{1}{2}\right)^{1000-k} \left(\frac{3}{4}\right)^k$. Cum $\frac{T_{k+2}}{T_{k+1}} \geq 1 \Leftrightarrow \frac{1000-k}{k+1} \cdot \frac{3}{2} \geq 1$, avem că $T_{k+2} \geq T_{k+1} \Leftrightarrow k = 0, 1, \ldots, 597$ şi $T_{k+2} < T_{k+1} \Leftrightarrow k = 598, 599, \ldots, 999$. Rezultă că T_{599} este cel mai mare termen.

Răspuns corect: $\boxed{\text{C}}$

5 Folosind relaţiile lui Viète, avem $S_1 = x_1 + x_2 + x_3 = 2$, $S_2 = x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 = 2$, de unde rezultă $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = S_1^2 - 2S_2 = 0$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{D}}$

6 Din $x_B = \frac{x_A + x_{A'}}{2} = \frac{x_C + x_{C'}}{2}$ şi $y_B = \frac{y_A + y_{A'}}{2} = \frac{y_C + y_{C'}}{2}$, rezultă că $A'(1,2)$, $C'(2,1)$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{A}}$

7 Cum $A + B = \pi - C$, avem că $\sin C + \cos C = 1$. Prin ridicare la pătrat obţinem $\sin 2C = 0$, adică $2C = \pi$ sau $C = \frac{\pi}{2}$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{B}}$

8 Se observă că $z * (-1) = -1$, pentru orice $z \in \mathbf{C}$, 0 este element neutru şi -1 nu este element simetrizabil.

Răspuns corect: $\boxed{\text{B}}$

9 Se observă că limita la stânga, $\lim\limits_{x \nearrow 0} f(x) = \lim\limits_{x \nearrow 0} \cos \frac{1}{x}$, nu există, deşi limita la dreapta, $\lim\limits_{x \searrow 0} e^{-\frac{1}{x}} = 0 = f(0)$. Deci nu există limita în 0.

Răspuns corect: $\boxed{\text{C}}$

10 Se observă că continuă pe $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ şi derivabilă pe $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, iar derivata este

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x^2} \sin \dfrac{1}{x} & \text{dacă} \quad x < 0 \\ \dfrac{1}{x^2} e^{-\frac{1}{x}} & \text{dacă} \quad x > 0 \end{cases}.$$

Răspuns corect: $\boxed{\text{D}}$

11 Cum $\displaystyle\int_1^a \frac{1}{x^2} e^{-\frac{1}{x}} \mathrm{d}x = \int_1^a \left(e^{-\frac{1}{x}}\right)' \mathrm{d}x = e^{-\frac{1}{x}}\Big|_1^a = e^{-\frac{1}{a}} - e^{-1}$, rezultă că limita este $\frac{e-1}{e}$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{E}}$

12 Cum $a \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, avem $\cos a = \frac{\sqrt{3}}{2}$ şi atunci $\dfrac{\sin a + \sqrt{3}\cos a}{\sin a - 2\sqrt{3}\cos a} = -\dfrac{4}{5}$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{C}}$

13 Raza cercului înscris în triunghiul ABC este $r = \frac{S}{p} = 1$, unde $S = \frac{AB \cdot AC}{2} = 24$ este aria triunghiului ABC şi $p = \frac{48}{2} = 24$ este semiperimetrul triunghiului ABC.

Răspuns corect: $\boxed{\text{B}}$

14 Determinantul $\det(A) = 3\omega(\omega - 1)$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{C}}$

15 Prin calcul, $A^2 = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{A}}$

16 Prin calcul, $A^4 = 3^2 I_3$, $A^6 = 3^2 A^2$, $A^8 = 3^4 I_3$. Prin metoda inducţiei matematice se poate demonstra că, pentru orice număr natural n, A^{2n} este o matrice cu toate elementele numere reale.

Răspuns corect: $\boxed{\text{D}}$

17 Prin calcul avem $f(1) = -1$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{C}}$

18 Din $f'(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} > 0$, pentru orice $x > 0$, rezultă că f este o funcţie strict crecătoare pe intervalul $(0, +\infty)$. Cum $\lim\limits_{x \searrow 0} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ şi f este continuă, avem că imaginea funcţiei este $\mathbb{R}$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{D}}$

19 Integrala $\int_1^e xf(x)\,\mathrm{d}x$ este egală cu $\int_1^e (x\ln x - 1)\,\mathrm{d}x = \dfrac{e^2-4e+5}{4}$, dacă se aplică integrarea prin părţi pentru integrala $\int_1^e x\ln x\mathrm{d}x$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{E}}$

20 Determinantul de tip Vandermonde este $(a_2-a_1)(a_3-a_1)(a_3-a_2)$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{C}}$

21 Avem că $\det(AA^t) = \det A \det A^t = (\det A)^2 = (a_2-a_1)^2(a_3-a_1)^2(a_3-a_2)^2$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{D}}$

22 Cum $\det A = 2 \neq 0$, rezută că sistemul liniar omogen are soluţia unică nulă $(0,0,0)$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{B}}$

23 Cum $x^2+x+1>0$, pentru orice $x\in\mathbb{R}$, rezultă că domeniul de definiţie este $D=\mathbb{R}$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{A}}$

24 f este derivabilă pe $\mathbb{R}$ şi $f'(x) = -\frac{2x+1}{(x^2+x+1)^2}$, $\forall x\in\mathbb{R}$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{C}}$

25 Integrala $\int\limits_0^1 f(x)\,dx = \int\limits_0^1 \frac{1}{(x+\frac{1}{2})^2+(\frac{\sqrt{3}}{2})^2}\,dx = \frac{2}{\sqrt{3}}\ \mathrm{arctg}\left(\frac{x+\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\right)\Big|_0^1 = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}$

Răspuns corect: $\boxed{\text{E}}$

26 $I_0 = \int\limits_0^1 \frac{1}{x^2+1}\,dx = \ \mathrm{arctg}\,x\big|_0^1 = \frac{\pi}{4}$ şi $I_1 = \int\limits_0^1 \frac{x}{x^2+1}\,dx = \frac{1}{2}\ln(x^2+1)\big|_0^1 = \ln\sqrt{2}$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{C}}$

27 $\forall n\geq 2$, avem $I_{n-2}+I_n = \int\limits_0^1 \frac{x^{n-2}+x^n}{x^2+1}\,dx = \int\limits_0^1 x^{n-2}\,dx = \frac{1}{n-1}$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{E}}$

28 Cum şirul $(I_n)_{n\geq 0}$ este descrescător, rezultă că $\frac{1}{2(n+1)} \leq I_n \leq \frac{1}{2(n-1)}$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{B}}$

29 Din $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$, $\lim\limits_{x\nearrow -1} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\searrow -1} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\nearrow 0} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\searrow 0} f(x) = +\infty$, rezultă că $y=0$ este asimptotă orizontală la $\pm\infty$ şi $x=-1$, $x=0$ asimptote verticale.

Răspuns corect: $\boxed{\text{D}}$

30 Cum $f'(x) = -\frac{2x+1}{x^2(x+1)^2}$, $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 0\}$ avem că $x = -\frac{1}{2}$ este punct de maxim local pentru f. Din tabloul de variaţie al funcţiei f şi din graficul lui f se deduce că intersecţia dintre graficul lui f şi dreapta orizontală $y = m$ are un singur punct de intersecţie dacă şi numai dacă $m = -4$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{B}}$

Universitatea din Craiova
Facultatea de Automatică, Calculatoare şi Electronică
Examen de admitere la licenţă - Sesiunea iulie 2023
Domeniul Calculatoare şi Tehnologia Informaţiei
Proba scrisă la matematică

Model 7

---

1 **(3p)** Fie $z = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$. Suma $|z| + |\bar{z}|$ este:

A 2 B i C 0 D -i E 10

---

2 **(3p)** Soluţia ecuaţiei $\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{-8x} = 2$ este:

A 0 B $\sqrt{3}$ C -8 D $\sqrt[3]{3}$ E 3

---

3 **(3p)** Dacă $B(2,3)$ şi $C(-1,5)$, atunci distanţa de la punctul $A(1,1)$ la dreapta BC este:

A 2 B 13 C 8 D $\frac{8}{\sqrt{13}}$ E 5

---

4 **(3p)** Se consideră progresia aritmetică $(a_n)_{n\geq 1}$, unde $a_1 = 1$ şi $a_5 = 13$. Atunci termenul a_{2009} este:

A 1005 B 150 C 199 D 2009 E 6025

---

5 **(3p)** Fie funcţiile $f,\ g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + 3x$ şi $g(x) = -x - 4$. Câte puncte comune au graficele celor două funcţii?

A nici unul B 1 C 2 D 3 E 4

---

6 **(3p)** Lungimea razei cercului circumscris unui triunghi cu laturile 5, 6 şi 7 este:

A 5 B 6 C $\frac{35}{4\sqrt{6}}$ D 11 D 17

---

7 **(3p)** În mulţimea numerelor reale ecuaţia $25^{x+3} = 0,04$ are soluţiile:

A -4 B 100 C 4 D 1 E 0

8 **(3p)** Într-o progresie aritmetică se cunosc $a_1 = 5$ şi $a_{26} = 105$. Atunci a_{100} este:

A 1000 B 250 C 401 D 510 E 1005

9 **(3p)** Dacă ecuaţia $(m-2)x^2 + (2m+1)x + m = 0$ are două rădăcini de semne contrare, atunci parametrul real m verifică:

A $m = 1$ B $m = 5$ C $m \in (0,2)$ D $m = 2$ E $m = 11$

---

10 **(3p)** Se consideră vectorii $\vec{u} = 2\vec{i} - \vec{j}$ şi $\vec{v} = a\vec{i} + 2\vec{j}$. Determinaţi $a \in \mathbb{R}$ astfel încât măsura unghiului dintre cei doi vectori să fie de $30°$.

A 1 B 5 C 7 D 16 E $16 + 10\sqrt{3}$

---

11 **(3p)** Valoarea lui S, unde $S = 1 + 4 + 7 + 10 + ... + 598$ este:

A 59800 B 12000 C 59880 D 59900 E 10000

---

12 **(3p)** Fie $A(2, 1)$ şi $B(6, 4)$. Determinaţi coordonatele punctului C, simetricul lui B faţă de A.

A $(4, 5/2)$ B $(-2, 2)$ C $(-3, -3)$ D $(2, 2)$ E $(-2, 3/2)$

Se consideră polinomul $f \in \mathbb{R}[X]$, $f = 4X^3 - 12X^2 + aX + b$.

13 **(3p)** Să se determine $a, b \in \mathbb{R}$ astfel încât $f(x) \geq 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

A $a \geq 12, b \geq 0$ B $a = 12, b \geq 0$ C $a \in \mathbb{R}, b \geq 0$
D $a = 0, b \in \mathbb{R}$ E $a \leq 12, b \geq 0$

14 **(3p)** Să se determine $a, b \in \mathbb{R}$ astfel încât f să se dividă cu polinomul $x^2 - 1$.

A $a \geq 4, b = 12$ B $a = 4, b = 12$ C $a = 0, b = 12$
D $a = 4, b = -12$ E $a = -4, b = 12$

15 **(3p)** Să se determine $a, b \in \mathbb{R}$ astfel încât ecuaţia $f(x) = 0$ să aibă rădăcina $x = i$.

A $a = b = 12$ B $a = 4, b = -12$ C $a = -0, b = 12$
D $a = 4, b = 10$ E $a = -4, b = -12$

---

16 **(3p)** Să se determine $a, b \in \mathbb{R}$, astfel încât polinomul să aibă radăcinile x_1, x_2, x_3 în progresie aritmetică şi în plus $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 11$.

A $a = -4, b = -12$ B $a = 0, b = -12$ C $a = 0, b = -12$
D $a = -4, b = 12$ E $a = 12, b = 0$

Se consideră punctele $A(m, 1)$, $B(1-m, 2)$, $C(2m+1, 2m+1)$, unde $m \in \mathbb{R}$ şi matricea

$$M = \begin{pmatrix} m & 1 & 1 \\ 1-m & 2 & 1 \\ 2m+1 & 2m+1 & 1 \end{pmatrix}.$$

17 **(3p)** Determinantul matricii M este:

A $-4m^2$ B $-4m^2 + m - 1$ C 0 D $2m$ E $4m^3$

18 **(3p)** Dacă punctele A, B, C sunt coliniare, atunci m verifică:

A $m \geq 0$ B $m \leq 0$ C $m = 0$ D $m = 2$ E $m \in \mathbb{R}$

19 **(3p)** Aria triunghiului ABC este mai mare sau egală cu:

A 1 B $\frac{15}{32}$ C 10 D 100 E 15

Fie $a, b, c \in \mathbb{R}^*$ şi matricea

$$A = \begin{pmatrix} a & a-b & a-b \\ 0 & b & b-c \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$$

20 **(3p)** Determinantul matricii A^n este:

A abc B c C $\sqrt[n]{abc}$ D $a^n b^n c^n$ E $\sqrt{abc}$

21 **(3p)** Determinantul matricii A^{-1} este:

A $\frac{1}{a}\frac{1}{b}\frac{1}{c}$ B $a^n b^n c^n$ C $\sqrt{abc}$ D 0 E $a^2 b^2 c^2$

Se consideră funcţia $f(x) = \dfrac{x^2 - 2x + p}{x^2 - 6x + 8}$.

22 **(3p)** Domeniul maxim de definiţie al funcţiei f este:

A $(0, \infty)$ B $\mathbb{R}$ C $\mathbb{R} \setminus \{4\}$ D $\mathbb{R} \setminus \{2\}$ E $\mathbb{R} \setminus \{2, 4\}$

23 **(3p)** Să se determine p astfel încât graficul lui f să fie tangent la axa Ox.

A $p = 0$ B $p = 13$ C $p = 1$ D $p \in \mathbb{R}$ E $p < 0$

24 **(3p)** Funcţia f este strict crescătoare pe

A $\mathbb{R}$ B $\mathbb{R} \setminus \{2, 4\}$ $(1, \frac{5}{2})$ D $(0, \infty)$ E $(-\infty, -1)$

Pentru $n \in \mathbb{N}^*$ se consideră funcţiile $F_n : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ $F_n(x) = \int\limits_0^x t^n e^{-t} dt, \quad x > 0.$

25 **(3p)** Să se calculeze $F_1(x), \quad x > 0.$

A $(1+x)e^{-x}$ B xe^{-x} C $1 - xe^{-x}$ D $1 - (1+x)e^{-x}$ E $-xe^{-x}$

26 **(3p)** Să se determine punctele de inflexiune ale graficului funcţiei F_n.

A n B e^n C 0 D n^n E e^{-n}

27 **(3p)** Să se calculeze $L = \lim\limits_{x\to\infty} F_2(x)$.

A $L = 0$ B $L = \infty$ C $L = 2$ D $L = -1$ E $L = e$

Se consideră funcţiile $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{x^3}{3} - x + \operatorname{arctg} x$ şi $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = \operatorname{arctg} x$.

28 **(3p)** Să se calculeze $\displaystyle\int_1^2 \frac{f'(x)}{x} dx$

A 0 B 2 C $\ln 2$ D $\frac{1}{2}\ln 2$ E $\frac{3}{5} - \frac{1}{2}\ln 5 + \frac{1}{2}\ln 2$

29 **(3p)** Să se determine $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1}{x^3}\displaystyle\int_0^x f(t)dt$.

A $\frac{1}{3}$ B ∞ C 0 D 1 E π

30 **(3p)** Să se calculeze aria suprafeţei cuprinse între graficele celor două funcţii şi dreptele $x = 0$ şi $x = 1$.

A $\frac{5}{12}$ B e C 1 D $\ln 2$ E π

Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.

Răspunsuri

Model 7

1 Răspuns corect: A

2 Răspuns corect: C

3 Răspuns corect: D

4 Răspuns corect: E

5 Răspuns corect: B

6 Răspuns corect: C

7 Răspuns corect: A

8 Răspuns corect: C

9 Răspuns corect: C

10 Răspuns corect: E

11 Răspuns corect: D

12 Răspuns corect: B

13 Răspuns corect: A

14 Răspuns corect: E

15 Răspuns corect: B

16 Răspuns corect: D

17 Răspuns corect: B

18 Răspuns corect: E

19 Răspuns corect: B

20 Răspuns corect: D

21 Răspuns corect: A

22 Răspuns corect: E

23 Răspuns corect: C

24 Răspuns corect: B

25 Răspuns corect: D

26 Răspuns corect: A

27 Răspuns corect: C

28 Răspuns corect: E

29 Răspuns corect: B

30 Răspuns corect: A

Universitatea din Craiova
Facultatea de Automatică, Calculatoare şi Electronică
Examen de admitere la licenţă - Sesiunea iulie 2023
Domeniul Calculatoare şi Tehnologia Informaţiei
Proba scrisă la matematică

Model 8

---

1 **(3p)** Forma simplificată a expresiei $\frac{n!+(n+1)!}{(n-1)!}$ este:

A n^2+2n B $n!$ C $n-1$ D 1 E n^2

---

2 **(3p)** Rezolvaţi inecuaţia $\log_{\frac{1}{2}}(x^2-8) \geq 0$.

A $\emptyset$ B $[2\sqrt{2},3]$ C $[3,\infty)$ D $[-\infty,3)$ E $[-3,-2\sqrt{2})\bigcup(2\sqrt{2},3]$

---

3 **(3p)** Să se calculeze $C_{2023}^{2}-C_{2023}^{2021}$.

A 1 B 0 C 2023! D 2021! E 2

---

4 **(3p)** Valoarea numărului $(\sqrt[3]{2})^{(\log_2 8)}$ este:

A $\sqrt{2}$ B 2 C 8 D 1 E 3

---

5 **(3p)** Să se determine valorile reale ale lui m ştiind că soluţiile x_1 şi x_2 ale ecuaţiei

$$x^2-(m^2+3)x+3=0,$$

verifică egalitatea $x_1+x_2+x_1x_2=7$.

A 0 B 1 C -1 D $-\sqrt{3}$ E ± 1

---

6 **(3p)** Să se calculeze lungimea laturii AC a triunghiului ABC ştiind că $BC=\sqrt{2}$, $m(\angle BAC)=30°$, $m(\angle ABC)=45°$.

A 1 B $\sqrt{2}$ C 2 D 6 D 2

---

7 **(3p)** Condiţia ca graficul funcţiei $f(x)=ax^2+bx+c$, ($a\neq 0, a, b, c$ reale) să nu taie axa Ox este:

A $\Delta<0$ B $\Delta=0$ C $\Delta\leq 0$ D $\Delta\geq 0$ E $\Delta>0$

8 **(3p)** Într-o progresie aritmetică se cunosc $a_1=6$ şi $a_2=5$. Să se calculeze a_7.

A 7 B 0 C 10 D 12 E 15

9 **(3p)** Rezolvaţi inecuaţia $\frac{|x-3|}{x^2-5x+6} \geq 2$.

A 4 B $\emptyset$ C $[4, \infty)$ D $(-\infty, 4]$ E $[3/2, 2)$

---

10 **(3p)** Se consideră funţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 e^x$. Derivata lui f este:

A $2xe^x$ B x^2e^x C $e^x(2x + x^2)$ D $(x^2 + 1)e^x$ E xe^x

---

11 **(3p)** Funcţia f este descrescătoare pe

A $\mathbb{R}$ B $[-2, 0]$ C $[-2, \infty)$ D $(0, 2)$ E $(-2, 2]$

---

12 **(3p)** Fie matricea $A_\alpha = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$,unde $\alpha \in \mathbb{R}$. Calculaţi A_α^n, unde $n \in \mathbb{N}^*$.

A $\begin{pmatrix} \cos(n\alpha) & \sin(n\alpha) \\ -\sin(n\alpha) & \cos(n\alpha) \end{pmatrix}$ B $\begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$ C $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

D $\begin{pmatrix} (\cos\alpha)^n & (\sin\alpha)^n \\ -(\sin\alpha)^n & (\cos\alpha)^n \end{pmatrix}$ E $\begin{pmatrix} n\cos\alpha & n\sin\alpha \\ -n\sin\alpha & n\cos\alpha \end{pmatrix}$

---

13 **(3p)** Folosind exerciţiul anterior calculaţi limita fiecarui element al lui B^n pentru $n \to \infty$, unde $B = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$.

A -1 B ∞ C $-\infty$ D 0 E 1

14 **(3p)** Pe mulţimea numerelor reale definim operaţia: $x \circ y = 2xy - 6x - 6y + 21$. Să se rezolve ecuaţia $x \circ x = 11$.

A 1 B 5 C $1, 5$ D -1 E -5

15 **(3p)** Ştiind că operaţia "$\circ$" e asociativă, calculaţi: $1 \circ \sqrt{2} \circ \sqrt{3} \circ \cdots \circ \sqrt{2023}$.

A 0 B 2023 C 1 D 3 E $\sqrt{2023}$

---

16 **(3p)** Se consideră polinomul $P(x) = x^4 + mx^2 + n$, unde $m, n \in \mathbb{R}$ cu radăcinile x_1, x_2, x_3 şi x_4. Să se determine m şi n ştiind că P admite rădacinile $x_1 = 0$ si $x_2 = 1$.

A $m = -1, n = 0$ B $m = 0, n = -1$ C $m = 1, n = -1$

D $m = 1, n = 1$ E $m = n = 0$

---

17 **(3p)** Determinaţi $m \in \mathbb{R}$ astfel încât polinomul P să verifice $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 2$.

A 0 B -1 C 2 D 1 E -2

18 **(3p)** Pentru $m = n = 1$ să se descompună P în produs de factori ireductibili.

A $(x^2-x+1)(x^2+x+1)$ B $(x^2+x+1)(x^2+x-1)$ C $(x^2-x-1)(x^2+x+1)$
D $(x^2-x+1)(x^2-x+1)$ E $(x^2-x-1)(x^2+x-1)$

19 **(3p)** Se consideră funcţia $g(x) = \frac{\ln x}{x} + x$. Calculaţi $\int_1^e \left(g(x) - \frac{\ln x}{x}\right) dx$.

A $e^2 - 1$ B e^2 C $(e^2-1)/2$ D $e^2/2$ E 1

---

20 **(3p)** Calculaţi $\int_1^e g(x)dx$

A 0 B e C $e^2/2$ D 1 E e^2

21 **(3p)** Arătaţi că şirul cu termenul general $I_n = \int_{e^n}^{e^{n+1}} (g(x) - x)\, dx, n \geq 1$ este o progresie aritmetică şi determinaţi raţia r.

A $r = 1$ B $r = e$ C $r = -1$ D $r = n$ E $r = e^n$

---

22 **(3p)** Calculaţi $\lim\limits_{n\to\infty} I_n$.

A ∞ B $-\infty$ C 0 D 1 E e

23 **(3p)** Se consideră funcţia $h(x) : [1, \infty) \to \mathbb{R}$, $h(x) = \frac{1}{x(1+\ln x)}$. Calculaţi $\int_1^e h'(x)dx$.

A 0 B e C 1 D $\frac{1-2e}{2e}$ E $1 - 2e$

---

24 **(3p)** Determinaţi intervalul maximal pe care orice primitivă a lui h este crescătoare.

A $\emptyset$ B $[e, \infty)$ C $[e, e^2]$ D $[e^2, \infty)$ E $[1, \infty)$

25 **(3p)** Determinaţi numărul real $a \in (1, e^2)$ astfel încat aria suprafeţei delimitate de graficul lui h, axa Ox, dreapta de ecuaţie $x = a$ si $x = e^2$ să fie egală cu $\ln \frac{3}{2}$.

A e B 2 C $\frac{3}{2}$ D $e + 1$ E $e^2 - 1$

26 **(3p)** Se consideră matricea $M(a) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a+1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -a \end{pmatrix}$, unde $a \in \mathbb{R}$ şi sistemul de ecuaţii liniare $\begin{cases} x + y + z = 2 \\ (a+1)x - y + z = 0 \\ x + y - az = 1 \end{cases}$.

Determinaţi a pentru care det $M(a) = 0$.

A 0 B -2 sau -1 C 1 D 2 E -2

---

27 **(3p)** Determinaţi numerele reale a ştiind că sistemul are soluţie unică (x_0, y_0, z_0) şi $2x_0 + y_0 z_0 = 0$.

A 1 B $-\frac{2}{3}$ C $-\frac{1}{2}$ D $\frac{1}{2}\ln 2$ E $-\frac{2}{3}$ sau $-\frac{1}{2}$

28 **(3p)** Se consideră funcţia $\varphi(x) : (-1, \infty) \to \mathbb{R}$, $\varphi(x) = 2x^3 - 3x^2 + 6x - 6\ln(x+1)$. Calculaţi $\varphi'(x)$.

A $\frac{6x^3}{x+1}$ B $\frac{6x^2}{x+1}$ C $6x^2 - 6x + 6$ D $\frac{1}{x+1}$ E $6\ln(x+1)$

29 **(3p)** Valoarea minimă a funcţiei φ este:

A -1 B e C 1 D $-6\ln 2$ E 0

30 **(3p)** Calculaţi $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt{\varphi(x)}}{x}$.

A 0 B 1 C ∞ D $-\infty$ E e

Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.

Răspunsuri

Model 8

1 Soluţia problemei 1.

Răspuns corect: A

2 Soluţia problemei 2.

Răspuns corect: E

3 Soluţia problemei 3.

Răspuns corect: B

4 Soluţia problemei 4.

Răspuns corect: B

5 Soluţia problemei 5.

Răspuns corect: E

6 Soluţia problemei 6.

Răspuns corect: C

7 Soluţia problemei 7.

Răspuns corect: A

8 Soluţia problemei 8.

Răspuns corect: B

9 Soluţia problemei 9.

Răspuns corect: E

10 Soluţia problemei 10.

Răspuns corect: C

11 Soluţia problemei 11.

Răspuns corect: B

12 Soluţia problemei 12.

Răspuns corect: A

13 Soluţia problemei 13.

Răspuns corect: $\boxed{\text{D}}$

14 Indicaţie: Se arată că $x \circ y = 2(x-3)(y-3)+3$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{C}}$

15 Soluţia problemei 15.

Răspuns corect: $\boxed{\text{D}}$

16 Soluţia problemei 16.

Răspuns corect: $\boxed{\text{A}}$

17 Soluţia problemei 17.

Răspuns corect: $\boxed{\text{B}}$

18 Soluţia problemei 18.

Răspuns corect: $\boxed{\text{A}}$

19 Soluţia problemei 19.

Răspuns corect: $\boxed{\text{C}}$

20 Soluţia problemei 20.

Răspuns corect: $\boxed{\text{C}}$

21 Soluţia problemei 21.

Răspuns corect: $\boxed{\text{A}}$

22 Soluţia problemei 22.

Răspuns corect: $\boxed{\text{A}}$

23 Soluţia problemei 23.

Răspuns corect: $\boxed{\text{D}}$

24 Soluţia problemei 24.

Răspuns corect: $\boxed{\text{E}}$

25 Soluţia problemei 25.

Răspuns corect: $\boxed{\text{A}}$

26 Soluţia problemei 26.

Răspuns corect: $\boxed{\text{B}}$

27 Soluţia problemei 27.

Răspuns corect: $\boxed{\text{E}}$

28 Soluţia problemei 28.

Răspuns corect: $\boxed{\text{A}}$

29 Soluţia problemei 29.

Răspuns corect: $\boxed{\text{E}}$

30 Se pleacă de la calculul limitei $\lim_{x\to 0} \frac{\varphi(x)}{x^2}$, care este zero folosind regula lui L'Hospital. Ca o consecinţă rezultă $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{\varphi(x)}}{|x|} = 0$ şi deci limita cerută este tot zero.

Răspuns corect: $\boxed{\text{A}}$

Universitatea din Craiova
Facultatea de Automatică, Calculatoare şi Electronică
Examen de admitere la licenţă - Sesiunea iulie 2023
Domeniul Calculatoare şi Tehnologia Informaţiei
Proba scrisă la matematică

Model 9

---

1 **(3p)** Fie $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$. Numărul submulţmilor cu 4 elemente ale mulţimii A care conţin elementul 0 este:

A C_6^4; B A_6^4; C A_5^3; D C_6^3; E C_5^3.

---

2 **(3p)** Probabilitatea ca un număr natural de două cifre să fie multilu de 10 este:

A 0.1; B 1; C 0.01; D 0.9; E 9.

---

3 **(3p)** Numărul complex $(1 - i)^{16}$ este egal cu:

A 256; B 128; C -128; D -128i; E 512i.

---

4 **(3p)** Vectorii $\vec{u} = (m - 1)\vec{i} + 2\vec{j}$, $\vec{v} = (m + 1)\vec{i} - 2\vec{j}$, $m < 0$, sunt perpendiculari. Atunci m este:

A $-\sqrt{2}$; B $\pm\sqrt{5}$; C $-\sqrt{5}$; D -1; E ± 1.

---

5 **(3p)** Valoarea maximă a funcţiei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = -3x^2 + 5x - 1$ este:

A $-\frac{12}{13}$; B $-\frac{13}{12}$; C $\frac{13}{12}$; D $\frac{12}{13}$; E $\frac{5}{6}$.

---

6 **(3p)** Dacă $\sin\alpha = \frac{1}{5}$, atunci $\cos(2\alpha)$ este:

A $\frac{2}{5}$; B $\frac{2}{25}$; C $\frac{20}{25}$; D $\frac{1}{25}$; E $\frac{23}{25}$.

Se dă următoarea sumă de termeni aflaţi în progresie aritmetică:

$$S_n = 7 + 3 - 1 - 5 - 9 - \cdots - x = -221\,.$$

7 **(3p)** Raţia acestei progresii aritmetice este:

A 7; B 4; C 2; D -4; E -2.

8 **(3p)** Ultimul termen x al sumei S_n este:

A -49; B -45; C -37; D -35; E -41.

9 **(3p)** Numărul de termeni n al sumei S_n este:

A 12; B 13; C 14; D 11; E 10.

---

10 **(3p)** Dacă $AB = 6$ şi $A(3, m)$, $B(-m, 3)$, atunci m se află în muţimea:

A $\{\pm 6\}$; B $\{\pm 9\}$; C $\{9\}$; D $\{6\}$; E $\{\pm 3\}$.

---

11 **(3p)** Dacă $A(3, 2)$, $B(-3, 3)$, $C(-1, -3)$, atunci dreapta suport a medianei duse din B are ecuaţia:

A $7x + 8y - 3 = 0$; B $2x - 5y + 3 = 0$; C $-5x - 9y + 7 = 0$;

D $3x - 3y + 10 = 0$; E $-3x + 3y + 10 = 0$.

---

12 **(3p)** Mulţimea soluţiilor reale ale ecuaţiei $\log_2(x+1)^2 + \log_4(x-2) = 1$ este:

A $\{3\}$; B {-2}; C {3;-2}; D {-3}; E $\{2\}$.

---

13 **(3p)** Limita $\lim\limits_{x \to 5} \frac{\sin(x-5)}{x^2-25}$ este:

A 1; B 0; C 0.1; D 10; E niciuna dintre variantele anterioare.

---

14 **(3p)** Limita $\lim\limits_{x \to 0} \sin\left(\frac{1}{x}\right) \operatorname{arctg} x$ este:

A 0; B 1; C 10; D 0.1; E ∞.

Fie matricele $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & m & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ şi $B = \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix}$.

15 **(3p)** Rangul matricei A este 3 atunci când m ia valoarea:

A 3; B -3; C 2; D 1; E 0.

16 **(3p)** Pentru $m = 1$ soluţia sistemului $AX = B$ este:

A $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$; B $X = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$; C $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$;

D $X = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$; E $X = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$;

Fie $a \in \mathbb{R}$ şi $x^3 - x - a = 0$ cu rădăcinile complexe x_1, x_2, x_3.

17 **(3p)**Produsul $(x_1 + a)(x_2 + a)(x_3 + a)$ este egal cu:

A 0; B a^3; C $3a$; D $-3a$; E $-a^3$.

18 **(3p)** Suma $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 =$ este:

A 0; B a^3; C $3a$; D $-3a$; E $-a^3$.

19 **(3p)** Dacă $x_1,\ x_2,\ x_3$ sunt numere întregi distincte două câte două, atunci $x_1,\ x_2,\ x_3 \in$

A {a; a+1; a-1}; B {1; -2; 3}; C {a; a+4; a-1};
D {-1; 2; 5}; E {a-2; a; a+2}.

Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = 3x - 2\cos x + 4$.

20 **(3p)** Funcţia f

A nu este monotonă; B este strict crescătoare; C este descrescătoare;
D este pară; E este impară.

21 **(3p)** Derivata a doua $f''(x)$ este:

A $2\cos x$; B $-2\cos x$; C $2\sin x$; D $-2\sin x$; E $3 + 2\cos x$.

22 **(3p)** O primitivă a lui f este:

A $F(x) = \frac{3}{2}x^2 - 2\sin x + 4$; B $F(x) = \frac{3}{2}x^2 + 2\sin x + 4$;
C $F(x) = \frac{3}{2}x^2 - 2\sin x + 4x + 5$; D $F(x) = 3x^2 + 2\cos x$;
E $F(x) = 3x^2 + 2\sin x$.

Fie $f : (2, \infty) \to \mathbb{R},\ f(x) = \dfrac{x}{(x-2)(x^2+1)}$ şi $F(x) = a\ln(x-2) + b\ln(x^2+1) + c\,\mathrm{arctg}\,x$.

23 **(3p)** F este o primitivă a lui f pentru

A $a = \frac{1}{5},\ b = \frac{1}{5},\ c = \frac{1}{5}$; B $a = \frac{2}{5},\ b = \frac{1}{5},\ c = \frac{2}{5}$; C $a = \frac{2}{5},\ b = \frac{-1}{5},\ c = \frac{2}{5}$;
D $a = \frac{2}{5},\ b = \frac{-1}{5},\ c = \frac{1}{5}$; E $a = \frac{2}{5},\ b = \frac{-2}{5},\ c = \frac{2}{5}$.

24 **(3p)** Orice primitivă a lui f este:

A pozitivă pe $(2, \infty)$; B descrescătoare pe $(2, \infty)$; C funcţie pară pe $(2, \infty)$;
D funcţie impară pe $(2, \infty)$; E crescătoare pe $(2, \infty)$.

25 **(3p)** Integrala $\displaystyle\int_3^4 f(x)\,dx$ este:

A $\frac{2}{5}\ln\left(\frac{40}{17}\right) - \frac{2}{5}\,\mathrm{arctg}\left(\frac{4}{3}\right)$; B $\frac{1}{5}\ln\left(\frac{40}{17}\right) + \frac{1}{5}\,\mathrm{arctg}\,4 - \frac{1}{5}\,\mathrm{arctg}\,3$;
C $\frac{1}{5}\ln\left(\frac{40}{17}\right) - \frac{1}{5}\,\mathrm{arctg}\,4 + \frac{1}{5}\,\mathrm{arctg}\,3$; D $\frac{2}{5}\ln\left(\frac{20}{17}\right) + \frac{1}{5}\,\mathrm{arctg}\,4 - \frac{1}{5}\,\mathrm{arctg}\,3$;
E $\frac{2}{5}\ln\left(\frac{20}{17}\right) - \frac{1}{5}\,\mathrm{arctg}\,4 + \frac{1}{5}\,\mathrm{arctg}\,3$.

Pentru fiecare $n \in \mathbb{N}^\star$ se consideră funcţia $f_n : [-1, 0] \to \mathbb{R},\ f_n(x) = (x+1)^n$.

26 **(3p)** Integrala $\int_{-1}^{0} f_1(x)\,dx$ este:

A $\frac{1}{2}$; B 1; C $-\frac{1}{2}$; D 0; E $\frac{3}{2}$.

27 **(3p)** Integrala $\int_{-1}^{0} x f_n(x)\,dx$ este:

A $\frac{1}{n+1}$; B $\frac{1}{(n+1)(n+2)}$; C $\frac{-1}{(n+1)(n+2)}$; D $\frac{1}{n+2}$; E $\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}$.

---

28 **(3p)** Integrala $\int_{1}^{e} \ln^2 x\,dx$ este:

A e; B 2; C $e+2$; D $e-2$; E $2e$.

---

29 **(3p)** Integrala $\int_{-3}^{3} \sin^9 x\,dx$ este:

A 9; B 0; C 1; D $\cos 9$; E $-\cos 9$.

---

30 **(3p)** Integrala $\int_{0}^{\frac{\pi}{3}} \sin^3 x\,dx$ este:

A 1; B 0; C $\frac{1}{20}$; D $\frac{5}{24}$; E $\frac{7}{12}$.

Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.

Răspunsuri

Model 9

1 Răspuns corect: E

2 Răspuns corect: A

3 Răspuns corect: A

4 Răspuns corect: C

5 Răspuns corect: C

6 Răspuns corect: E

7 Răspuns corect: D

8 Răspuns corect: E

9 Răspuns corect: B

10 Răspuns corect: E

11 Răspuns corect: A

12 Răspuns corect: A

13 Răspuns corect: C

14 Răspuns corect: A

15 Răspuns corect: E

16 Răspuns corect: C

17 Răspuns corect: B

18 Răspuns corect: C

19 Răspuns corect: A

20 Răspuns corect: B

21 Răspuns corect: A

22 Răspuns corect: C

23 Răspuns corect: D

24 Răspuns corect: E

25 Răspuns corect: B

26 Răspuns corect: A

27 Răspuns corect: C

28 Răspuns corect: D

29 Răspuns corect: B

30 Răspuns corect: D