

Universitatea din Craiova
Facultatea de Automatică, Calculatoare și Electronică
Examen de admitere la licență - Sesiunea iulie 2023
Domeniul Calculatoare și Tehnologia Informației
Proba scrisă la matematică

Model 1

-
- 1** (3p) Mulțimea soluțiilor reale ale ecuației $\sqrt{2x+1} = x+1$ este:
- ☐ A $\emptyset$ ☐ B $\{0\}$ ☐ C $\{0, 1\}$ ☐ D $\{1\}$ ☐ E $\{-1, 0, 1\}$
-
- 2** (3p) Se consideră progresia aritmetică 1, 4, 7, 10, ... Al douăzecilea termen al său este:
- ☐ A 60 ☐ B 58 ☐ C 56 ☐ D 54 ☐ E 62
-
- 3** (3p) Modulul numărului complex $z = \frac{1-3i}{1+3i}$ este:
- ☐ A 2 ☐ B $\sqrt{3}$ ☐ C $\frac{1}{\sqrt{3}}$ ☐ D $\frac{1}{2}$ ☐ E 1
-
- 4** (3p) Coeficientul termenului care îl conține pe x^6 din dezvoltarea $\left(x^2 + \frac{2}{\sqrt{x}}\right)^8$ este:
- ☐ A $C_8^4 2^4$ ☐ B $C_8^6 2^6$ ☐ C $C_8^5 2^5$ ☐ D 1 ☐ E 8
-
- 5** (3p) Soluția ecuației $\log_3(x^2+9) - \log_3(2x) = 1$ este:
- ☐ A 0 ☐ B 1 ☐ C $\frac{1}{3}$ ☐ D 9 ☐ E 3
-
- 6** (3p) Se consideră punctul $A(1, 0)$. Distanța de la punctul A la dreapta d de ecuație $x - \sqrt{3}y + 3 = 0$ este:
- ☐ A $\frac{1}{\sqrt{3}}$ ☐ B $\frac{1}{2}$ ☐ C 2 ☐ D 1 ☐ E 0
-
- 7** (3p) Valoarea numărului $4 \sin \frac{\pi}{12} \cos \frac{\pi}{12}$ este:
- ☐ A 2 ☐ B $\frac{1}{\sqrt{2}}$ ☐ C $\sqrt{2}$ ☐ D 1 ☐ E $\frac{\sqrt{3}}{2}$
-
- 8** (3p) Se consideră triunghiul ABC de vârfuri $A(-2, 1)$, $B(-1, 0)$, $C(3, 4)$. Ecuația medianei duse din vârful A este:
- ☐ A $3x - y + 1 = 0$ ☐ B $x - 3y + 5 = 0$ ☐ C $2x - 3y + 5 = 0$
☐ D $x + 3y - 5 = 0$ ☐ E $3x - y + 5 = 0$
-

9 (3p) Soluțiile ecuației $\sin 2x = \cos x$, care aparțin intervalului $[0, 2\pi]$, sunt:

- ☐ A $\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$ ☐ B $\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{6}$ ☐ C $\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{6}$ ☐ D $\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{6}, \frac{3\pi}{2}$
☐ E $\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$

Fie $a \in (0, \infty)$ și funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = a^x + 3^x - 2 \cdot 5^x$.

10 (3p) Derivata $f'(0)$ este:

- ☐ A 1 ☐ B $\ln(3a)$ ☐ C $\ln \frac{3a}{25}$ ☐ D $\ln \frac{1}{25}$ ☐ E $\ln \frac{3}{25}$

11 (3p) Dacă $f(x) \geq 0$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$, atunci numărul $a + \frac{1}{a}$ este egal cu:

- ☐ A $\frac{75}{628}$ ☐ B $\frac{634}{75}$ ☐ C 2 ☐ D $\frac{5}{2}$ ☐ E $\frac{10}{3}$

12 (3p) Dacă $a = e$, atunci $\int_0^1 f(x) dx$ este:

- ☐ A $\frac{2}{\ln 3} - \frac{8}{\ln 5}$ ☐ B $e - 1$ ☐ C $\frac{2}{\ln 3} + \frac{8}{\ln 5}$ ☐ D $e + 1$ ☐ E $e - 1 + \frac{2}{\ln 3} - \frac{8}{\ln 5}$

Se consideră funcția $f: (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x \ln(1 - x)$.

13 (3p) Derivata $f'(x)$, pentru orice $x \in (0, 1)$, este:

- ☐ A $\ln(1 - x) - \frac{x}{1 - x}$ ☐ B $\frac{x}{1 - x}$ ☐ C $\ln(1 - x) + 1$ ☐ D $\ln(1 - x)$
☐ E $\ln(1 - x) + \frac{x}{1 - x}$

14 (3p) Ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă $\frac{e-1}{e}$ este:

- ☐ A $y = -1 + \frac{1}{e} - e \left(x - 1 + \frac{1}{e} \right)$ ☐ B $y = -1$ ☐ C $y = -e \left(x - 1 + \frac{1}{e} \right)$
☐ D $y = -1 + \frac{1}{e}$ ☐ E $x = \frac{e-1}{e}$

15 (3p) Valoarea limitei $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} \int_0^x f(t) dt$ este:

- ☐ A $\frac{1}{4}$ ☐ B 0 ☐ C $-\frac{1}{4}$ ☐ D $-\frac{3}{4}$ ☐ E $\frac{1}{2}$

Pe mulțimea numerelor reale se consideră legea de compoziție asociativă

$$x \circ y = xy - 5x - 5y + 30.$$

16 (3p) Elementul neutru ale legii „o” este:

- ☐ A 5 ☐ B 2 ☐ C 6 ☐ D 4 ☐ E 0

17 (3p) Numărul $1 \circ 2 \circ 3 \circ \dots \circ 800$ este egal cu:

- ☐ A 5 ☐ B 22 ☐ C 9 ☐ D 10 ☐ E 15

18 (3p) Suma soluțiilor reale ale ecuației $x \circ x \circ x = x$ este:

- ☐ A 2 ☐ B 22 ☐ C 9 ☐ D 10 ☐ E 15

Se consideră polinomul $f = X^3 - 2X^2 - 2X + 3$ cu rădăcinile x_1, x_2, x_3 .

19 (3p) Care este valoarea numărului $x_1 + x_2 + x_3$?

- ☐ A 2 ☐ B 3 ☐ C -2 ☐ D -3 ☐ E 1

20 (3p) Care este valoarea numărului $\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} + \frac{1}{x_3^2}$?

- ☐ A $\frac{1}{4}$ ☐ B $\frac{1}{9}$ ☐ C $\frac{16}{9}$ ☐ D $\frac{4}{9}$ ☐ E $\frac{9}{4}$

Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x + e^{-x}$.

21 (3p) Punctele de extrem ale funcției f sunt în număr de:

- ☐ A 3 ☐ B 4 ☐ C 0 ☐ D 1 ☐ E 2

22 (3p) Funcția f este descrescătoare pe mulțimea:

- ☐ A $(-\infty, 0]$ ☐ B $[-1, 2)$ ☐ C $(0, \infty)$ ☐ D $\mathbb{R}$ ☐ E $(0, 5)$

23 (3p) Valoarea integralei $\int_0^1 x f(x^2) dx$ este:

- ☐ A $\frac{1-3e}{6}$ ☐ B $\frac{5-3e}{6}$ ☐ C $\frac{1+3e}{6}$ ☐ D $\frac{2-3e}{4e}$ ☐ E $\frac{-2+3e}{4e}$

Se consideră funcția $f : (-8, 8) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \ln \frac{8+x}{8-x}$.

24 (3p) Asimptotele la graficul funcției f sunt în număr de:

- ☐ A 2 ☐ B 4 ☐ C 0 ☐ D 1 ☐ E 3

25 (3p) Care este valoarea limitei $\lim_{x \rightarrow \infty} x f\left(\frac{1}{x}\right)$?

- ☐ A 8 ☐ B 4 ☐ C $\frac{1}{4}$ ☐ D $e^{\frac{1}{4}}$ ☐ E e^8

26 (3p) Valoarea integralei $\int_0^1 e^{f(x)} dx$ este:

- ☐ A 1 ☐ B $16 \ln \frac{8}{7} - 1$ ☐ C $16 \ln \frac{7}{8} - 1$ ☐ D $16 \ln \frac{8}{7} + 1$ ☐ E -1
-

Se consideră matricea $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

27 (3p) Valoarea determinantului matricei A este:

- ☐ A 2 ☐ B 0 ☐ C -4 ☐ D 1 ☐ E 6

28 (3p) Inversa matricei A este:

- ☐ A $\begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}$ ☐ B $\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ ☐ C $\begin{pmatrix} 0 & -1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & -1/2 \\ -1/2 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}$
- ☐ D $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ ☐ E $\begin{pmatrix} 0 & -1/2 & -1/2 \\ -1/2 & 0 & -1/2 \\ -1/2 & -1/2 & 0 \end{pmatrix}$

29 (3p) Valoarea numărului real a , pentru care $A^2 = A + a \cdot I_3$, este:

- ☐ A 0 ☐ B -1 ☐ C 3 ☐ D 2 ☐ E -3
-

30 (3p) Se consideră funcția $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$. Limita $\lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^1 x^t f(x) dx$ este egală cu:

- ☐ A 1 ☐ B 0 ☐ C -1 ☐ D $\frac{1}{2}$ ☐ E 2
-

Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.

Soluții

Model 1

- 1** Din condițiile $2x + 1 \geq 0$ și $x + 1 \geq 0$, rezultă $x \geq -\frac{1}{2}$. Prin ridicare la pătrat, obținem $x = 0$.

Răspuns corect: **B**

- 2** $a_{20} = a_1 + 19r$, unde $a_1 = 1$ și $r = 3$. Deci $a_{20} = 58$.

Răspuns corect: **B**

- 3** $|z| = \frac{|1 - 3i|}{|1 + 3i|} = \frac{10}{10} = 1$.

Răspuns corect: **E**

- 4** $T_{k+1} = C_8^k (x^2)^{8-k} \left(\frac{2}{\sqrt{x}}\right)^k = C_8^k 2^k x^{16-\frac{5k}{2}}$. Din condiția $16 - \frac{5k}{2} = 6$ rezultă $k = 4$.

Răspuns corect: **A**

- 5** Condițiile de existență a logaritmilor sunt $x^2 + 9 > 0$, $2x > 0$. Deci căutăm soluții $x > 0$. Ecuația devine $\log_3 \frac{x^2 + 9}{2x} = 1$ sau $\frac{x^2 + 9}{2x} = 3$, cu unica soluție $x = 3$.

Răspuns corect: **E**

- 6** $\text{dist}(A, d) = \frac{|1 \cdot (-1) + 0 \cdot \sqrt{3} + 3|}{\sqrt{1^2 + (-\sqrt{3})^2}}$.

Răspuns corect: **D**

- 7** $\sin(2\alpha) = 2 \sin \alpha \cos \alpha$. Deci $4 \sin \frac{\pi}{12} \cos \frac{\pi}{12} = 2 \sin \frac{\pi}{6}$.

Răspuns corect: **D**

- 8** Mijlocul laturii $[BC]$ este $M(1, 2)$. Mediana dusă din vârful A are ecuația

$$\frac{x - x_A}{x_M - x_A} = \frac{y - y_A}{y_M - y_A} \text{ sau, echivalent } x - 3y + 5 = 0.$$

Răspuns corect: **B**

- 9** Ecuația este echivalentă cu $2 \sin x \cos x = \cos x$. Rezultă $\cos x = 0$ sau $\sin x = \frac{1}{2}$.

Soluțiile din $[0, 2\pi]$ ale acestor două ecuații sunt $\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$ și $\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}$.

Răspuns corect: **D**

- 10** $f'(x) = a^x \ln a + 3^x \ln 3 - 2 \cdot 5^x \ln 5, \forall x \in \mathbb{R}$. Deci $f'(0) = \ln \frac{3a}{25}$.

Răspuns corect: **C**

- 11** Observăm că $f(0) = 0$, deci condiția din ipoteză se rescrie $f(x) \geq f(0), \forall x \in \mathbb{R}$. Prin urmare, 0 este punct de minim local pentru funcția f . Conform Teoremei lui Fermat, $f'(0) = 0$. Rezultă $\ln \frac{3a}{25} = 0$, de unde obținem $a = \frac{25}{3}$. Așadar, $a + \frac{1}{a} = \frac{634}{75}$.

Răspuns corect: **B**

12 $\int_0^1 (e^x + 3^x - 2 \cdot 5^x) dx = e - 1 + \frac{2}{\ln 3} - \frac{8}{\ln 5}.$

Răspuns corect: **E**

13 $f'(x) = \ln(1-x) - \frac{x}{1-x}, \forall x \in \mathbb{R}.$

Răspuns corect: **A**

14 Tangenta la graficul funcției f în punctul de abscisă x_0 are ecuația $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$. Pentru $x_0 = \frac{e-1}{e}$ obținem ecuația $y = -1 + \frac{1}{e} - e \left(x - 1 + \frac{1}{e} \right).$

Răspuns corect: **A**

15 Integrând prin părți, obținem $\int_0^x f(t) dt = \frac{1}{2}(x^2 - 1) \ln(1-x) - \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}x^2$, oricare ar fi $x \in (0, 1)$. Deci $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} \int_0^x f(t) dt = -\frac{3}{4}.$

Răspuns corect: **D**

16 $x \circ y = (x - 5)(y - 5) + 5, \forall x, y \in \mathbb{R}$. Din $x \circ e = e \circ x = x, \forall x \in \mathbb{R}$, obținem $e = 6$.

Răspuns corect: **C**

17 Din asociativitate rezultă $a := 1 \circ 2 \circ \dots \circ 800 = (1 \circ \dots \circ 4) \circ 5 \circ (6 \circ \dots \circ 800) = \alpha \circ 5 \circ \beta$, unde $\alpha := 1 \circ \dots \circ 4, \beta := 6 \circ \dots \circ 800$. Cum $x \circ 5 = 5 \circ x = 5, \forall x \in \mathbb{R}$, obținem imediat $a = 5$.

Răspuns corect: **A**

18 Avem $x \circ x \circ x = (x - 5)^3 + 5$. Ecuația se rescrie $(x - 5)^3 + 5 = x$ și are soluțiile 4, 5, 6.

Răspuns corect: **E**

19 Din relațiile lui Viète, $x_1 + x_2 + x_3 = S_1 = 2$.

Răspuns corect: **A**

20 Avem succesiv

$$b := \frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} + \frac{1}{x_3^2} = \left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} \right)^2 - 2 \left(\frac{1}{x_1 x_2} + \frac{1}{x_2 x_3} + \frac{1}{x_1 x_3} \right) = \frac{S_2^2}{S_3^2} - 2 \frac{S_1}{S_3}.$$

Cum $S_2 = -2, S_3 = -3$, rezultă $b = \frac{16}{9}$.

Răspuns corect: ☐ C

- 21** $f'(x) = 1 - e^{-x}$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Singurul punct critic al funcției f este $x = 0$. Cum $f'(x) \leq 0$, $\forall x \in (-\infty, 0]$ și $f'(x) \geq 0$, $\forall x \in [0, \infty)$, obținem că f este descrescătoare pe $(-\infty, 0]$ și crescătoare pe $[0, \infty)$, deci are un singur punct de extrem, și anume minim, $x = 0$.

Răspuns corect: ☐ D

- 22** Răspuns corect: ☐ A

23 $\int_0^1 x f(x^2) dx = \int_0^1 (x^3 + x e^{-x^2}) dx = \frac{x^4}{4} \Big|_0^1 - \frac{1}{2} e^{-x^2} \Big|_0^1 = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} (e^{-1} - 1).$

Răspuns corect: ☐ E

- 24** Cum $\lim_{\substack{x \rightarrow -8 \\ x > -8}} f(x) = -\infty$, dreapta $x = -8$ este asimptotă verticală (la dreapta) și $\lim_{\substack{x \rightarrow 8 \\ x < 8}} f(x) = \infty$, dreapta $x = 8$ este asimptotă verticală (la stânga).

Răspuns corect: ☐ A

25 Avem $\lim_{x \rightarrow \infty} x f\left(\frac{1}{x}\right) = \lim_{x \rightarrow \infty} x \ln = \lim_{x \rightarrow \infty} \ln \left(\frac{8x+1}{8x-1}\right)^x.$

Cum $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{8x+1}{8x-1}\right)^x = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{2}{8x-1}\right)^{\frac{8x-1}{2}} \right]^{\frac{2x}{6x-1}} = e^{\frac{1}{4}}$, limita cerută este egală cu $\frac{1}{4}$.

Răspuns corect: ☐ C

26 Obținem $\int_0^1 e^{f(x)} dx = \int_0^1 \frac{8+x}{8-x} dx = \int_0^1 \left(-1 + \frac{16}{8-x}\right) dx$

Răspuns corect: ☐ B

- 27** Calcul direct.

Răspuns corect: ☐ C

- 28** Calcul direct.

Răspuns corect: ☐ E

29 Deoarece $A^2 - A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = 2 \cdot I_3$, rezultă $a = 2$.

Răspuns corect: ☐ E

30 $\lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^1 x^t \sqrt{1-x^2} dx$

Evident, $0 \leq x^t \sqrt{1-x^2}$, $\forall x \in [0, 1]$, $\forall t > 0$. Deci

$$0 \leq \lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^1 x^t \sqrt{1-x^2} dx, \quad \forall t > 0. \quad (1)$$

Apoi, cum $\sqrt{1-x^2} \leq 1$, $\forall x \in [0, 1]$, rezultă $x^t \sqrt{1-x^2} \leq x^t$, $\forall x \in [0, 1]$, $\forall t > 0$. Prin urmare, $\int_0^1 x^t \sqrt{1-x^2} dx \leq \int_0^1 x^t dx = \frac{x^{t+1}}{t+1} \Big|_0^1 = \frac{1}{t+1}$, $\forall t > 0$. Trecând la limită cu $t \rightarrow \infty$, rezultă

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^1 x^t \sqrt{1-x^2} dx \leq 0. \quad (2)$$

Din relațiile (1) și (2), folosind criteriul cleștelui, deducem că limita cerută este egală cu 0.

Răspuns corect: B

Universitatea din Craiova
Facultatea de Automatică, Calculatoare și Electronică
Examen de admitere la licență - Sesiunea iulie 2023
Domeniul Calculatoare și Tehnologia Informației
Proba scrisă la matematică

Model 2

-
- 1** (3p) Soluția în $\mathbb{C}$ a ecuației $2z - 3\bar{z} = 1 + 5i$ este:
- ☐ A $1 + i$ ☐ B $1 - i$ ☐ C $-1 - i$ ☐ D $-1 + i$ ☐ E 0
-
- 2** (3p) Se consideră ecuația $x^2 - 2mx + m + 1 = 0$, având rădăcinile x_1, x_2 . Numărul $m \in \mathbb{R}^*$, pentru care $x_1^2 + x_2^2 - x_1x_2 = -3$, este:
- ☐ A $\frac{3}{4}$ ☐ B $\frac{4}{3}$ ☐ C 3 ☐ D 4 ☐ E 1
-
- 3** (3p) Ecuația $\log_3 x + \log_9 x - \log_{\sqrt{3}} x = \frac{3}{2}$ are soluția reală:
- ☐ A -3^3 ☐ B 3^{-3} ☐ C 2^3 ☐ D 3^2 ☐ E 3^3
-
- 4** (3p) Coeficientul lui x^4 în dezvoltarea $(2 + x)^{10}$ este:
- ☐ A $C_{10}^4 2^4$ ☐ B 2^6 ☐ C $C_{10}^4 2$ ☐ D $C_{10}^4 2^6$ ☐ E C_{10}^4
-
- 5** (3p) Mulțimea soluțiilor reale ale ecuației $\sqrt[3]{x} = x$ este:
- ☐ A $\{0, 1\}$ ☐ B $\{0\}$ ☐ C $\{-1, 0, 1\}$ ☐ D $\{-1, 0\}$ ☐ E $\emptyset$
-
- 6** (3p) Mulțimea numerelor reale care verifică ecuația $8^x - 8^{1-x} = 2$ este:
- ☐ A $\emptyset$ ☐ B $\left\{\frac{3}{2}\right\}$ ☐ C $\left\{8, \frac{2}{3}\right\}$ ☐ D $\left\{1, \frac{2}{3}\right\}$ ☐ E $\left\{\frac{2}{3}\right\}$
-
- 7** (3p) Fie $x \in \mathbb{R}$, astfel încât $\operatorname{ctg} x = 1$. Atunci $\sin^2 x$ este egal cu:
- ☐ A $\frac{1}{2}$ ☐ B 1 ☐ C $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ☐ D $\frac{3}{4}$ ☐ E $\frac{1}{4}$
-
- 8** (3p) Raza cercului circumscris triunghiului ABC , având laturile de lungimi 4, 5, 7, este egală cu:
- ☐ A $\frac{1}{24}$ ☐ B $\frac{35\sqrt{6}}{24}$ ☐ C $\frac{\sqrt{6}}{24}$ ☐ D $\frac{35}{24}$ ☐ E $\frac{35\sqrt{6}}{12}$
-

Se consideră matricea $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ m & 1 & 2m \\ 0 & 1 & m \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

9 (3p) Mulțimea numerelor $m \in \mathbb{R}$, pentru care matricea A este inversabilă, este:

- ☐ A $\mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$ ☐ B $\mathbb{R}$ ☐ C $\{0\}$ ☐ D $\{1\}$ ☐ E $\mathbb{R} \setminus \{1\}$

10 (3p) Mulțimea numerelor $m \in \mathbb{R}$, pentru care $A^{-1} = \frac{1}{2}A^*$, este:

- ☐ A $\{1, -2\}$ ☐ B $\emptyset$ ☐ C $\{-1, -2\}$ ☐ D $\{-1, 2\}$ ☐ E $\{1, 2\}$

11 (3p) Mulțimea numerelor $m \in \mathbb{Z}$, pentru care $A^{-1} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{Z})$, este:

- ☐ A $\{-1\}$ ☐ B $\{1\}$ ☐ C $\emptyset$ ☐ D $\{0\}$ ☐ E $\{-1, 1\}$

Se consideră polinomul $f = (X + i)^{2022} + (X - i)^{2022} \in \mathbb{C}[X]$.

12 (3p) Valoarea numărului $f(-1)$ este:

- ☐ A 2^{1011} ☐ B 0 ☐ C 2 ☐ D 2^{1012} ☐ E -2^{1011}

13 (3p) Restul împărțirii polinomului f la $X + 1$ este:

- ☐ A 1 ☐ B -1 ☐ C 2 ☐ D 0 ☐ E -2

14 (3p) Numărul de rădăcini reale ale polinomului f este:

- ☐ A 2020 ☐ B 2022 ☐ C 2 ☐ D 0 ☐ E 4

Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$.

15 (3p) Funcția f este strict crescătoare pe mulțimea:

- ☐ A $(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$ ☐ B $(1, 2)$ ☐ C $(-1, 1)$ ☐ D $(-\infty, -1)$ ☐ E $(1, \infty)$

16 (3p) Ecuația tangentei la graficul funcției f , în punctul de abscisă $x_0 = 0$, este:

- ☐ A $y = 2x$ ☐ B $2y = x$ ☐ C $y = -x$ ☐ D $y = -2x$ ☐ E $y = x$

17 (3p) Pentru orice $x \in (0, \infty)$ numărul $f(x) - \arctg x$ aparține mulțimii:

- ☐ A $(1, \infty)$ ☐ B $(0, 1)$ ☐ C $(0, \infty)$ ☐ D $(1, 2)$ ☐ E $\left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$

Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{25 + x^2}$.

18 (3p) Integrala $\int_{-5}^5 x f(x) dx$ este egală cu:

- ☐ A $5\sqrt{2}$ ☐ B 5 ☐ C $\frac{1}{5}$ ☐ D 0 ☐ E $\frac{\sqrt{2}}{5}$

19 (3p) Aria domeniului mărginit de graficul funcției f , axa Ox și dreptele de ecuații $x = 5$ și $x = -5$ este:

- ☐ A 25 ☐ B $25(\sqrt{2} + \ln(\sqrt{2} + 1))$ ☐ C $25 \ln(\sqrt{2} + 1)$ ☐ D $\sqrt{2} + \ln(\sqrt{2} + 1)$
☐ E $\ln(\sqrt{2} + 1)$

20 (3p) Limita $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^{2023}} \cdot \int_x^{x+1} f(t) dt$ este egală cu:

- ☐ A 0 ☐ B 1 ☐ C $\frac{1}{2023}$ ☐ D 2023 ☐ E ∞

Se consideră triunghiul OAB , de vârfuri $O(0, 0)$, $A(2, 0)$, $B(1, 1)$.

21 (3p) Ecuația mediatoarei segmentului $[AB]$ este:

- ☐ A $x + y = 1$ ☐ B $x + y = 2$ ☐ C $x - y = 2$ ☐ D $x - y = -1$ ☐ E $x = 1$

22 (3p) Aria triunghiului OAB este:

- ☐ A 1 ☐ B 2 ☐ C $\frac{1}{2}$ ☐ D $\frac{3}{2}$ ☐ E $\frac{1}{3}$

Se consideră funcția $f : [-2, 2] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 + x$.

23 (3p) Integrala $\int_{-2}^2 f(x) dx$ este egală cu:

- ☐ A 2 ☐ B 4 ☐ C 0 ☐ D 6 ☐ E 12

24 (3p) Integrala $\int_{-2}^2 xf(x) dx$ este egală cu:

- ☐ A $\frac{272}{15}$ ☐ B $\frac{1}{15}$ ☐ C $\frac{32}{15}$ ☐ D $\frac{8}{3}$ ☐ E $\frac{136}{15}$

Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$.

25 (3p) Numărul de asimptote la graficul funcției f este:

- ☐ A 0 ☐ B 2 ☐ C 1 ☐ D 3 ☐ E 4

26 (3p) Integrala $\int_0^1 xf(\sqrt{x}) dx$ este egală cu:

- ☐ A $1 + \ln 2$ ☐ B $\ln 2$ ☐ C $1 - \ln 2$ ☐ D 1 ☐ E $2 - \ln 2$

27 (3p) Numărul punctelor de extrem local ale funcției f este:

- ☐ A 1 ☐ B 2 ☐ C 4 ☐ D 0 ☐ E 3

Se consideră funcția $f : \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sin x$.

28 (3p) Integrala $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{1 + f^2(x)} dx$ este egală cu:

- ☐ A $\frac{1}{2}$ ☐ B π ☐ C $\frac{\pi}{2}$ ☐ D $\frac{\pi}{4}$ ☐ E $\frac{\pi}{8}$

29 (3p) Volumul corpului obținut prin rotația graficului funcției f în jurul axei Ox este:

- ☐ A π^2 ☐ B $\frac{\pi^2}{2}$ ☐ C $\frac{\pi^2}{4}$ ☐ D $\pi^2 - 1$ ☐ E $\frac{\pi^2}{4} - \frac{\pi}{4}$
-

30 (3p) Suma primilor 10 termeni ai progresiei geometrice 2, 4, 8, 16, ... aparține intervalului:

- ☐ A $(2^{11} - 3, 2^{11} - 1)$ ☐ B $(2^{10} - 3, 2^{10} - 1)$ ☐ C $(2^{12} - 3, 2^{12} - 1)$
☐ D $(2^{10} - 1, 2^{10})$ ☐ E $(2^{11} - 1, 2^{11})$
-

Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.

Soluții

Model 2

- 1** Dacă $z = x + yi$, ecuația devine $2(x + 3y) - 3(x - yi) = 1 + 5i$. Rezultă $x = -1$, $y = 1$.

Răspuns corect: **D**

- 2** $S = x_1 + x_2 = 2m$, $P = x_1x_2 = m + 1$. Relația devine $S^2 - 3P = -3$, de unde $m_1 = 0$, $m_2 = \frac{3}{4}$.

Răspuns corect: **A**

- 3** Ecuația este echivalentă cu $\log_3 x + \frac{1}{2} \log_3 x - 2 \log_3 x = \frac{3}{2}$, de unde $\log_3 x = -3$.

Răspuns corect: **B**

- 4** $T_{k+1} = C_{10}^k 2^{10-k} x^k$. Se obține $k = 4$.

Răspuns corect: **D**

- 5** Prin ridicare la puterea a treia, ecuația este echivalentă cu $x = x^3$.

Răspuns corect: **C**

- 6** Notăm $t := 8^x$ și ecuația devine $t - \frac{8}{t} = 2$, de unde $t = 4$.

Răspuns corect: **E**

- 7** $\sin^2 x = \frac{\operatorname{tg}^2 x}{1 + \operatorname{tg}^2 x}$.

Răspuns corect: **A**

- 8** $R = \frac{abc}{4S} = \frac{abc}{4\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}$.

Răspuns corect: **B**

- 9** $\det(A) \neq 0$.

Răspuns corect: **A**

- 10** Cum $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} A^*$, obținem $\det(A) = 2$, de unde rezultă $m_1 = -1$, $m_2 = 2$.

Răspuns corect: **D**

- 11** Din $A \cdot A^{-1} = I_3$ rezultă $\det(A) \det(A^{-1}) = \det(I_3) = 1$. Cum $A^{-1} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{Z})$, pentru ca $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)} \in \mathbb{Z}$, trebuie ca $\det(A) = \pm 1$ sau, echivalent, $m^2 - m = \pm 1$, condiție care nu e satisfăcută de niciun număr $m \in \mathbb{Z}$.

Răspuns corect: **C**

- 12** $f(-1) = [(1+i)^2]^{1011} + [(1-i)^2]^{1011} = (2i)^{1011} + (-2i)^{1011} = 0$.

Răspuns corect: **B**

- 13** Cum $f(-1) = 0$, restul este 0.

Răspuns corect: **D**

- 14** Fie $\alpha = a + bi \in \mathbb{C}$ rădăcină a polinomului f , cu $a, b \in \mathbb{R}$. Din $f(\alpha) = 0$, obținem $(\alpha + i)^{2022} = -(\alpha - i)^{2022}$. De aici rezultă $|\alpha + i|^{2022} = |\alpha - i|^{2022}$. Obținem imediat $a^2 + (b+1)^2 = a^2 + (b-1)^2$ și astfel $b = 0$. Prin urmare, polinomul f are numai rădăcini reale.

Răspuns corect: **B**

- 15** $f'(x) = \frac{1-x^2}{(x^2+1)^2}, \forall x \in \mathbb{R}$.

Răspuns corect: **C**

- 16** $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$.

Răspuns corect: **E**

- 17** Fie $g : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = f(x) - \arctg x$. Din tabelul de variație, rezultă că imaginea funcției g este $\left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$.

Răspuns corect: **E**

- 18** Funcție impară pe interval simetric față de 0.

Răspuns corect: **D**

- 19** $\mathcal{A} = \int_{-5}^5 \sqrt{25+x^2} dx$.

Răspuns corect: **B**

- 20** Conform teoremei de medie, oricare ar fi $x \in (0, \infty)$ există $c_x \in [x, x+1]$, astfel încât $\int_x^{x+1} f(t) dt = f(c_x)$. Deci, $\forall x \in (0, \infty)$,

$$\frac{\sqrt{25+x^2}}{x^{2023}} \leq \frac{1}{x^{2023}} \cdot \int_x^{x+1} f(t) dt \leq \frac{\sqrt{25+(x+1)^2}}{x^{2023}}.$$

Răspuns corect: ☐ A

- 21** Mijlocul segmentului $[AB]$ este $M\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right)$. Panta dreptei AB este $m_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = -1$, iar panta mediatoarei segmentului $[AB]$ este $m = -\frac{1}{m_{AB}} = 1$. Ecuația mediatoarei este $y - y_M = m(x - x_M)$.

Răspuns corect: ☐ D

22 $\mathcal{A}_{OAB} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_O & y_O & 1 \\ x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \end{vmatrix}.$

Răspuns corect: ☐ A

- 23** Funcție impară pe interval simetric față de 0.

Răspuns corect: ☐ C

- 24** Calcul direct.

Răspuns corect: ☐ A

- 25** Graficul funcției f are asimptote orizontale la $-\infty$ și ∞ .

Răspuns corect: ☐ B

- 26** Calcul direct.

Răspuns corect: ☐ C

- 27** Funcția f are un punct de maxim local în $x = 0$.

Răspuns corect: ☐ A

- 28** Calcul direct.

Răspuns corect: ☐ D

29 $\mathcal{V} = \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} f^2 x dx.$

Răspuns corect: ☐ C

30 $S_{10} = 2 \frac{1 - 2^{10}}{1 - 2}.$

Răspuns corect: ☐ A

Universitatea din Craiova
Facultatea de Automatică, Calculatoare și Electronică
Examen de admitere la licență - Sesiunea iulie 2023
Domeniul Calculatoare și Tehnologia Informației
Proba scrisă la matematică

Model 3

1 (3p) Mulțimea valorilor lui $m \in \mathbb{R}$, pentru care $x_1^2 + x_2^2 - x_1x_2 = 0$, unde x_1, x_2 sunt rădăcinile ecuației $x^2 - 2mx + m = 0$, este:

- ☐ A $m \in \left\{-1, \frac{3}{4}\right\}$ ☐ B $m \in \left\{1, \frac{3}{4}\right\}$ ☐ C $m \in \left\{0, -\frac{3}{4}\right\}$ ☐ D $m \in \left\{0, \frac{3}{4}\right\}$
☐ E $m \in \left\{0, \frac{3}{2}\right\}$
-

2 (3p) Soluția ecuației $\log_3 x + \log_9 x - \log_{\sqrt{3}} x = \frac{3}{2}$ este:

- ☐ A $x = \frac{1}{27}$ ☐ B $x = \frac{1}{3}$ ☐ C $x = \frac{1}{9}$ ☐ D $x = 3$ ☐ E $x = 9$
-

3 (3p) Numărul termenilor raționali ai dezvoltării $(\sqrt[5]{3} + \sqrt{2})^{20}$ este:

- ☐ A 2 ☐ B 5 ☐ C 6 ☐ D 3 ☐ E 4
-

4 (3p) Știind că $\sin x = \frac{1}{2}$, valoarea lui $\cos 2x$ este:

- ☐ A $-\frac{1}{2}$ ☐ B $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ☐ C $\frac{1}{2}$ ☐ D $-\frac{\sqrt{1}}{2}$ ☐ E $\frac{1}{4}$
-

5 (3p) Partea întreagă a numărului $(\sqrt{8} + 1)^2$ este:

- ☐ A 14 ☐ B 9 ☐ C 13 ☐ D 12 ☐ E 10
-

6 (3p) Care este valoarea numărului real a pentru care graficul funcției $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 2(a+2)x + a^2 + 2$ intersectează axa Ox într-un singur punct ?

- ☐ A $-\frac{1}{2}$ ☐ B -1 ☐ C -2 ☐ D $-\frac{1}{4}$ ☐ E 0
-

7 (3p) Distanța de la punctul $A(2, 2)$ la dreapta determinată de punctele $B(4, 0)$ și $C(0, 4)$ este:

- ☐ A $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ☐ B $\frac{\sqrt{5}}{2}$ ☐ C $\frac{\sqrt{2}}{3}$ ☐ D 0 ☐ E $\frac{\sqrt{2}}{2}$
-

8 (3p) Câte numere naturale de trei cifre distincte se pot forma cu cifre din mulțimea $\{1, 3, 5, 7, 9\}$?

- ☐ A A_5^3 ☐ B C_5^3 ☐ C 60 ☐ D 70 ☐ E 30
-

9 (3p) Care este valoarea pozitivă a lui m , astfel încât vectorii $\vec{u} = (m+1)\vec{i} + 8\vec{j}$ și $\vec{v} = (m-1)\vec{i} - \vec{j}$ să fie perpendiculari ?

- ☐ A 3 ☐ B $\frac{9}{7}$ ☐ C $-\frac{9}{7}$ ☐ D -2 ☐ E 0
-

10 (3p) Se consideră punctele $A(1, 1)$, $B(3, 4)$, $C(0, 2)$. Numărul $(\vec{AB} + \vec{AC}) \cdot \vec{CB}$ este egal cu:

- ☐ A -12 ☐ B -1 ☐ C 11 ☐ D -13 ☐ E 0
-

11 (3p) Care sunt valorile parametrului real m , pentru care $x^2 - x - m > 0$, oricare ar fi număr real x ?

- ☐ A $m \in (-\infty, -\frac{1}{4})$ ☐ B $m \in (-\infty, \frac{1}{2})$ ☐ C $m \in (-\infty, \frac{1}{4})$
☐ D $m \in (-\infty, 2)$ ☐ E $m \in (-\infty, 4)$
-

Se consideră matricea $A = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 3 & -9 \end{pmatrix}$ și mulțimea $G = \{X(a), X(a) = I_2 + aA, a \in \mathbb{R}\}$.

12 (3p) Pentru orice $a, b \in \mathbb{R}$ matricea $X(a) \cdot X(b)$ este egală cu:

- ☐ A $X(10ab)$ ☐ B $X(a+b)$ ☐ C $X(a+b-ab)$ ☐ D $X(a+b-10ab)$
☐ E $X(a+b-9ab)$
-

13 (3p) Câte soluții în mulțimea G are ecuația $X^2 = \begin{pmatrix} \frac{17}{5} & -\frac{36}{5} \\ -\frac{36}{5} & \frac{113}{5} \end{pmatrix}$?

- ☐ A 2 ☐ B 1 ☐ C 0 ☐ D 3 ☐ E 4
-

14 (3p) Se consideră mulțimea $G = (-1, 1)$, legea de compoziție $x * y = \frac{x+y}{1+xy}$ și

$f : G \rightarrow (0, \infty)$, $f(x) = \frac{1-x}{1+x}$ izomorfism de grupuri de la $(G, *)$ la $((0, \infty), \cdot)$.

Numărul $\frac{1}{2} * \frac{1}{4} * \frac{1}{6} * \dots * \frac{1}{2022}$ este egal cu:

- ☐ A $\frac{1}{2023}$ ☐ B $\frac{1}{2022}$ ☐ C $\frac{1011}{1012}$ ☐ D $\frac{1011}{2023}$ ☐ E $\frac{3}{2023}$
-

Se consideră sistemul de ecuații liniare $\begin{cases} x + y + 2z = 2 \\ 3x + ay + z = 0 \\ x - y + z = \frac{4}{5} \end{cases}$, unde $a \in \mathbb{R}$.

15 (3p) Pentru $a = 0$, valoarea determinantului matricei pătratică asociate sistemului dat este:

- ☐ A -7 ☐ B -3 ☐ C -9 ☐ D 0 ☐ E -8

16 (3p) Pentru $a = -7$, sistemul dat are:

- ☐ A o singură soluție ☐ B două soluții ☐ C o infinitate de soluții
☐ D trei soluții ☐ E nicio soluție

Se consideră polinomul $f = X^4 + aX^3 + bX^2 + cX + 2 \in \mathbb{R}[X]$, având rădăcinile $x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{C}$.

17 (3p) Știind că restul împărțirii polinomului f la $X + 1$ este 31, valoarea numărului $-a + b - c$ este:

- ☐ A 31 ☐ B 25 ☐ C 57 ☐ D 0 ☐ E 28

18 (3p) Valoarea lui $c \in \mathbb{R}$, astfel încât $x_1x_2x_3x_4 + \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} + \frac{1}{x_4} = 37$, este:

- ☐ A -37 ☐ B 70 ☐ C -36 ☐ D -70 ☐ E 36

Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \ln \frac{x^2 + 5}{x^2 + 1}$.

19 (3p) Derivata $f'(x)$, $x \in \mathbb{R}$, este:

- ☐ A $\frac{-8x}{(x^2 + 1)(x^2 + 5)}$ ☐ B $\frac{-6x}{(x^2 + 1)(x^2 + 5)}$ ☐ C $\frac{-2x}{(x^2 + 1)(x^2 + 5)}$
☐ D $\frac{-8x}{(x^2 + 1)}$ ☐ E $\frac{-2x}{(x^2 + 5)}$

20 (3p) Asimptota la graficul funcției f este:

- ☐ A $y = 1$ asimptotă orizontală la $+\infty$ ☐ B $x = 0$ asimptotă verticală
☐ C $y = e$ asimptotă orizontală la $-\infty$ ☐ D $y = e$ asimptotă orizontală la $+\infty$
☐ E $y = 0$ asimptotă orizontală la $+\infty$ și $-\infty$

21 (3p) Limita $\lim_{x \rightarrow \infty} x^2 f(x)$ este egală cu:

- ☐ A $+\infty$ ☐ B 4 ☐ C 2 ☐ D 1 ☐ E 0

Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x^2 + 25} - \sqrt{x^2 + 4}$.

22 (3p) Derivata $f'(x)$, $x \in \mathbb{R}$, este:

- ☐ A $x \frac{\sqrt{x^2 + 4} + \sqrt{x^2 + 25}}{\sqrt{x^2 + 4}\sqrt{x^2 + 25}}$ ☐ B $x^2 \frac{\sqrt{x^2 + 4} - \sqrt{x^2 + 25}}{\sqrt{x^2 + 4}\sqrt{x^2 + 25}}$

☐ $2x \frac{\sqrt{x^2+4} - \sqrt{x^2+25}}{\sqrt{x^2+4}\sqrt{x^2+25}}$
☐ $2x \frac{\sqrt{x^2+4} + \sqrt{x^2+25}}{\sqrt{x^2+4}\sqrt{x^2+25}}$
☐ $x \frac{\sqrt{x^2+4} - \sqrt{x^2+25}}{\sqrt{x^2+4}\sqrt{x^2+25}}$

23 (3p) Imaginea funcției f este:

☐ $(9, 33]$
☐ $(8, 33]$
☐ $(0, 3]$
☐ $(10, 13]$
☐ $(-5, -1]$

24 (3p) Limita $\lim_{x \rightarrow \infty} xf(x)$ este egală cu:

☐ $\frac{2}{3}$
☐ $\frac{21}{2}$
☐ 21
☐ 0
☐ $\frac{29}{2}$

25 (3p) Se consideră integrala $I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{5x^2 + x + 1} dx$, $n \in \mathbb{N}^*$. Limita $\lim_{n \rightarrow \infty} nI_n$ este egală cu:

☐ $\frac{1}{7}$
☐ 0
☐ $\frac{1}{5}$
☐ $\frac{1}{6}$
☐ ∞

Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x}{(x^2+2)(x^2+4)}$.

26 (3p) Valoarea integralei $\int_0^1 (x^2+2) \cdot f(x) dx$ este:

☐ $-\frac{1}{2} \ln \frac{4}{5}$
☐ $\frac{1}{2} \ln \frac{5}{4}$
☐ $\frac{1}{2} \ln \frac{4}{5}$
☐ $-\frac{1}{2} \ln \frac{5}{4}$
☐ $\frac{1}{2} \ln 20$

27 (3p) Limita $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x tf(t) dt}{x^2}$ este egală cu:

☐ ∞
☐ 2
☐ $\frac{1}{2}$
☐ $-\infty$
☐ 0

28 (3p) Aria suprafeței plane cuprinse între graficul funcției f , axa Ox și dreptele de ecuații $x=0$ și $x=1$ este:

☐ $\frac{1}{2} \ln 2 + \frac{1}{3} \ln 3 - \frac{1}{5} \ln 5$
☐ $\frac{1}{5} \ln 2 + \frac{1}{3} \ln 3 - \frac{1}{6} \ln 5$
☐ $\frac{1}{4} \ln 2 + \frac{1}{4} \ln 3 - \frac{1}{4} \ln 5$
☐ $\frac{1}{4} \ln 2 + \frac{1}{4} \ln 3$
☐ $\frac{1}{4} \ln 3 - \frac{1}{4} \ln 5$

Se consideră funcția $f: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \ln(4x) - \frac{1}{x}$.

29 (3p) Ecuația tangentei la graficului funcției f în punctul de abscisă x_0 , știind că această tangentă este paralelă cu dreapta $y=2x$, este:

☐ A $y - \ln \frac{4}{e} = 2(x - 1)$ ☐ B $y + \ln \frac{4}{e} = 2(x - 1)$ ☐ C $y = 2x$
☐ D $y - \ln \frac{4}{e} = 2(x + 1)$ ☐ E $y + \ln \frac{4}{e} = 2(x + 1)$.

30 (3p) Integrala $\int_1^e f(x)dx$ este egală cu:

☐ A $\ln(2e)$ ☐ B $2(e - 1) \ln 4$ ☐ C $2 \ln 2$ ☐ D $2(e - 1) \ln 2$
☐ E $2(e - 2) \ln 2$

Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
 Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.

Soluții

Model 3

- 1** Folosind relațiile lui Viète, $S = 2m$, $P = m$. Din $S^2 - 3P = 0$, rezultă $4m^2 - 3m = 0$, de unde $m \in \left\{0, \frac{3}{4}\right\}$.

Răspuns corect: D

- 2** Condiția de existență a logaritmilor este $x > 0$. Cu notația $t := \log_3 x$, ecuația devine $t + \frac{t}{2} - 2t = \frac{3}{2}$, de unde obținem $t = -3$.

Răspuns corect: A

- 3** $T_{k+1} = C_{20}^k 3^{\frac{20-k}{5}} 2^{\frac{k}{2}}$, $k : 2$ și $k : 5$, obținem $k \in \{0, 10, 20\}$, adică 3 termeni.

Răspuns corect: D

- 4** $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x = \frac{1}{2}$.

Răspuns corect: C

- 5** $\left[(\sqrt{8} + 1)^2\right] = [9 + 2\sqrt{8}] = 9 + [2\sqrt{8}] = 9 + [\sqrt{32}]$. Cum $\sqrt{32} \in [\sqrt{25}, \sqrt{36})$, rezultă că $\left[(\sqrt{8} + 1)^2\right] = 14$.

Răspuns corect: A

- 6** Condiția este ca ecuația să aibă o singură soluție, adică $\Delta = 0$. Obținem $a = -\frac{1}{2}$.

Răspuns corect: A

- 7** Dreapta BC are ecuația $x + y - 4 = 0$. Atunci $\text{dist}(A, BC) = \frac{|1 \cdot x_A + 1 \cdot y_A - 4|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = 0$.

Răspuns corect: D

- 8** A_5^3 .

Răspuns corect: A

- 9** Condiția de perpendicularitate este $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$, de unde deducem $m \in \{-3, 3\}$.

Răspuns corect: A

- 10** $(\vec{AB} + \vec{AC}) \cdot \vec{CB} = 11$.

Răspuns corect: C

11 Din condiția $\Delta < 0$, deducem $m \in (-\infty, -\frac{1}{4})$.

Răspuns corect: **A**

12 $X(a) \cdot X(b) = X(a + b - 10ab), \forall a, b \in \mathbb{R}$.

Răspuns corect: **D**

13 Fie $X(a) \in G$ soluție a ecuației date. Obținem $X(2a - 10a^2) = X(-\frac{12}{5})$, prin urmare $2a - 10a^2 = -\frac{12}{5}$ și obținem două soluții: $a_1 = \frac{3}{5}, a_2 = -\frac{2}{5}$.

Răspuns corect: **A**

14 Dacă $a := \frac{1}{2} * \frac{1}{4} * \frac{1}{6} * \dots * \frac{1}{2022}$, atunci $f(a) = f(\frac{1}{2}) \cdot f(\frac{1}{4}) \cdot \dots \cdot f(\frac{1}{2022}) = \frac{1}{2023}$.
Deci $\frac{1-a}{1+a} = \frac{1}{2023}$, de unde rezultă $a = \frac{1011}{1012}$.

Răspuns corect: **C**

15 Valoarea determinantului matricei pătratice asociate sistemului este -7 .

Răspuns corect: **A**

16 $\det(A) = 0, d_{\text{car}} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & -7 & 0 \\ 1 & -1 & \frac{4}{5} \end{vmatrix} = 0$, deci sistemul este compatibil simplu nedeterminat.

Răspuns corect: **C**

17 Din $f(-1) = 1 - a + b - c + 2 = 31$, rezultă $-a + b - c = 28$.

Răspuns corect: **E**

18 Relația se rescrie $S_4 + \frac{S_3}{S_4} = 37$ și, folosind relațiile lui Viète, rezultă $c = -70$.

Răspuns corect: **D**

19 $f'(x) = \frac{-8x}{(x^2 + 1)(x^2 + 5)}, x \in \mathbb{R}$.

Răspuns corect: **A**

20 $y = 0$ asimptotă orizontală la $+\infty$ și $-\infty$.

Răspuns corect: **E**

21 $\lim_{x \rightarrow \infty} x^2 \ln \frac{x^2 + 5}{x^2 + 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \ln \left(\frac{x^2 + 5}{x^2 + 1} \right)^{x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \ln \left[\left(1 + \frac{4}{x^2 + 1} \right)^{\frac{x^2 + 1}{4}} \right]^{\frac{4x^2}{x^2 + 1}} = 4$.

Răspuns corect: **B**

22 $f'(x) = x \frac{\sqrt{x^2+4} - \sqrt{x^2+25}}{\sqrt{x^2+4}\sqrt{x^2+25}}, x \in \mathbb{R}.$

Răspuns corect: E

23 Din studiul variației funcției f , deducem că $\text{Im } f = (0, 3]$.

Răspuns corect: C

24 $\lim_{x \rightarrow \infty} x f(x) = \frac{21}{2}.$

Răspuns corect: B

25 Cum $x^{n+1} \leq x^n, \forall x \in [0, 1]$ și $\forall n \in \mathbb{N}^*$, deducem $\frac{x^{n+1}}{5x^2+x+1} \leq \frac{x^n}{5x^2+x+1}, \forall x \in [0, 1]$ și $\forall n \in \mathbb{N}^*$, de unde, prin integrare pe $[0, 1]$, rezultă $I_{n+1} \leq I_n, \forall n \in \mathbb{N}^*$, adică $(I_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ este descrescător.

Avem

$$5I_{n+2} + I_{n+1} + I_n = \frac{1}{n+1}, \forall n \in \mathbb{N}^*. \quad (3)$$

Din $I_{n+2} \leq I_n, I_{n+2} \leq I_{n+1}, \forall n \in \mathbb{N}^*$ și (3), rezultă $7I_{n+2} \leq \frac{1}{n+1}, \forall n \in \mathbb{N}^*$, deci $I_{n+2} \leq \frac{1}{7(n+1)}, \forall n \in \mathbb{N}^*$ sau

$$I_n \leq \frac{1}{7(n-1)}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2. \quad (4)$$

Pe de altă parte, din $I_n \geq I_{n+2}, I_n \geq I_{n+1}, \forall n \in \mathbb{N}^*$ și (3), obținem $7I_n \geq \frac{1}{n+1}, \forall n \in \mathbb{N}^*$ sau

$$I_n \geq \frac{1}{7(n+1)}, \forall n \in \mathbb{N}^*. \quad (5)$$

Așadar, din (4) și (5) avem pentru orice $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$

$$\frac{n}{7(n+1)} \leq nI_n \leq \frac{n}{7(n-1)}. \quad (6)$$

Trecând la limită cu $n \rightarrow \infty$ în (6), deducem cu criteriul cleștelui, $\lim_{n \rightarrow \infty} nI_n = \frac{1}{7}.$

Răspuns corect: A

26 $\int_0^1 (x^2+2) \cdot f(x) dx = \int_0^1 \frac{x}{x^2+4} dx = \frac{1}{2} \ln \frac{5}{4}.$

Răspuns corect: B

27 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x t f(t) dt}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x f(x)}{2x} = 0.$

Răspuns corect: E

28
$$\begin{aligned} \text{Aria} &= \int_0^1 |f(x)| dx = \int_0^1 \frac{x}{(x^2+2)(x^2+4)} dx = \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{x}{x^2+2} dx - \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{x}{x^2+4} dx \\ &= \frac{1}{4} \ln 2 + \frac{1}{4} \ln 3 - \frac{1}{4} \ln 5. \end{aligned}$$

Răspuns corect: C

29 Din condiția $f'(x_0) = 2$ obținem $x_0 = 1$, deci singurul punct de pe graficul funcției f , în care tangenta la grafic are panta 2 este $(1, f(1)) = (1, \ln \frac{4}{e})$. Ecuația tangentei în $A(x_0, f(x_0))$ este $y - f(x_0) = f'(x_0) \cdot (x - x_0)$, deci ecuația cerută este $y - \ln \frac{4}{e} = 2(x - 1)$.

Răspuns corect: A

30
$$\int_1^e \left[\ln(4x) - \frac{1}{x} \right] dx = 2(e - 1) \ln 2.$$

Răspuns corect: D

Universitatea din Craiova
Facultatea de Automatică, Calculatoare și Electronică
Examen de admitere la licență - Sesiunea iulie 2023
Domeniul Calculatoare și Tehnologia Informației
Proba scrisă la matematică

Model 4

-
- 1** (3p) Mulțimea soluțiilor reale ale ecuației $\sqrt{1-x^2} = x+1$ este:
- ☐ A $\{-1\}$ ☐ B $\{-1, 0\}$ ☐ C $\{-1, 0, 1\}$ ☐ D $\{0\}$ ☐ E $\emptyset$
-
- 2** (3p) Se consideră progresia geometrică $1, 2, 2^2, 2^3, \dots$. Suma primilor zece termeni este:
- ☐ A 1000 ☐ B 1024 ☐ C 1023 ☐ D 1001 ☐ E 2000
-
- 3** (3p) Dacă x_1 și x_2 sunt rădăcinile ecuației $x^2 + x + 1 = 0$, atunci $\frac{x_1^2 + x_2^2}{x_1 x_2}$ este:
- ☐ A -1 ☐ B 1 ☐ C 0 ☐ D i ☐ E $i\sqrt{3}$
-
- 4** (3p) Numărul submulțimilor formate numai cu numere pare ale mulțimii $\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ este:
- ☐ A 8 ☐ B 6 ☐ C 64 ☐ D 7 ☐ E 32
-
- 5** (3p) Dacă suma coeficienților binomiali ai dezvoltării $(2^a + 3b)^n$ este egală 1024, atunci n este:
- ☐ A 3 ☐ B 0 ☐ C 12 ☐ D 9 ☐ E 10
-
- 6** (3p) În reperul cartezian xOy se consideră vectorii $\overrightarrow{AB} = 3\overrightarrow{i} + (m-1)\overrightarrow{j}$, $\overrightarrow{CD} = (n+1)\overrightarrow{i} + 4\overrightarrow{j}$, unde m, n sunt numere reale. Dacă $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$, atunci m și n iau valorile:
- ☐ A $m = 1, n = -1$ ☐ B $m = 5, n = 2$ ☐ C $m = 2, n = 5$
☐ D $m = 2, n = 0$ ☐ E $m = 3, n = -2$
-

Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = |x+1| - |x-1|$.

- 7** (3p) Derivata în 0, $f'(0)$, este egală cu:
- ☐ A 0 ☐ B 2 ☐ C 1 ☐ D -1 ☐ E ∞
- 8** (3p) Funcția f este
- ☐ A continuă pe $\mathbb{R}$ și derivabilă pe $\mathbb{R}$ ☐ B continuă pe $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$ și derivabilă pe $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$ ☐ C continuă pe $\mathbb{R}$ și derivabilă pe $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$ ☐ D continuă pe $\mathbb{R}$ și derivabilă pe $\mathbb{R} \setminus \{-1, 0, 1\}$ ☐ E continuă pe $\mathbb{R}$ și derivabilă pe $\mathbb{R} \setminus \{0\}$

9 (3p) Integrala $\int_0^1 f(x) dx$ este:

- ☐ A 0 ☐ B 2 ☐ C $\frac{1}{2}$ ☐ D -1 ☐ E 1
-

10 (3p) Relativ la reperul cartezian ortonormat xOy , două puncte M_1 și M_2 se deplasează în plan urmând traiectoriile $y = \log_2(3^x + 4^x)$ și $y = \log_2 5^x$. Distanța de la originea reperului la punctul de intersecția al traiectoriilor este:

- ☐ A 0 ☐ B 1 ☐ C $2\sqrt{1 + \log_2^2 5}$ ☐ D $\log_2 5$ ☐ E -1
-

11 (3p) Dacă $\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, $x \in (0, \pi)$, atunci $\sin 2x$ este:

- ☐ A 0 ☐ B $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ ☐ C $-\frac{1}{2}$ ☐ D $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ☐ E $\frac{1}{2}$
-

12 (3p) Relativ la reperul cartezian ortonormat xOy , se dau punctele $A(1, 0)$ și $B(0, 2)$. Aria triunghiului OAB este:

- ☐ A 1 ☐ B $\frac{1}{2}$ ☐ C -1 ☐ D 2 ☐ E $\frac{3}{2}$
-

Se consideră polinomul cu coeficienți reali $f = X^3 - 3X^2 + aX - 1$.

13 (3p) Valoarea lui $f(0)$ este:

- ☐ A 1 ☐ B -1 ☐ C a ☐ D 0 ☐ E $a - 3$

14 (3p) Dacă $X^2 - 2X + 1$ divide polinomul f , atunci valoarea lui a este:

- ☐ A 3 ☐ B 2 ☐ C -2 ☐ D 0 ☐ E 1

15 (3p) Pentru $a = 3$, rădăcinile polinomului f sunt:

- ☐ A $x_1 = 0, x_2 = x_3 = 1$ ☐ B $x_1 = -1, x_2 = 0, x_3 = 1$ ☐ C $x_1 = x_2 = x_3 = -1$
☐ D $x_1 = x_2 = x_3 = 1$ ☐ E $x_1 = x_2 = -1, x_3 = 1$
-

Fie funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definită prin

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + x + 1 & \text{dacă } x < 0 \\ e^{-x} & \text{dacă } x \geq 0. \end{cases}$$

16 (3p) Limita $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ este:

- ☐ A 0 ☐ B -1 ☐ C 1 ☐ D $\frac{1}{2}$ ☐ E e

17 (3p) Valoarea sumei $f'_s(0) + f'_d(0)$ este:

- ☐ A 0 ☐ B 1 ☐ C -1 ☐ D e^{-1} ☐ E e

18 (3p) O primitivă F a funcției f pe $\mathbb{R}$ este:

☐ A $F(x) = \begin{cases} \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + x & \text{dacă } x < 0 \\ -e^{-x} & \text{dacă } x \geq 0. \end{cases}$ ☐ B $F(x) = \begin{cases} x^2 + x + 1 & \text{dacă } x < 0 \\ e^{-x} & \text{dacă } x \geq 0. \end{cases}$

☐ C $F(x) = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + x - e^{-x}, x \in \mathbb{R}$ ☐ D $F(x) = \begin{cases} \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + x + 2023 & \text{dacă } x < 0 \\ -e^{-x} + 2024 & \text{dacă } x \geq 0. \end{cases}$

☐ E $F(x) = \begin{cases} \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + x + 2023 & \text{dacă } x < 0 \\ -e^{-x} + 2023 & \text{dacă } x \geq 0. \end{cases}$

Fie matricea $A = \begin{pmatrix} a & a & a \\ a & a & a \\ a & a & a \end{pmatrix}$, $a \in \mathbb{R}$.

19 (3p) Rangul matricei A este un număr din mulțimea:

☐ A $\{1\}$ ☐ B $\{0, 1\}$ ☐ C $\{1, 2, 3\}$ ☐ D $\{0, 1, 2, 3\}$ ☐ E $\emptyset$

20 (3p) Pentru $a = 1$, matricea A^{2023} este egală cu:

☐ A $3^{2023}A$ ☐ B $(3^{2022} - 1)A$ ☐ C A ☐ D $3^{2022}A$ ☐ E $3^{2024}A$

Se consideră funcțiile $f_1, f_2 : [0, \frac{\pi}{2}] \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f_1(x) = \frac{\sin x}{\sin x + \cos x}, \quad f_2(x) = \frac{\cos x}{\sin x + \cos x}.$$

21 (3p) Integrala $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (f_1(x) + f_2(x)) dx$ este:

☐ A 1 ☐ B 0 ☐ C $\frac{\pi}{2}$ ☐ D π ☐ E $\frac{\pi}{4}$

22 (3p) Integrala $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (f_1(x) - f_2(x)) dx$ este:

☐ A 0 ☐ B -1 ☐ C $\frac{\pi}{2}$ ☐ D 1 ☐ E $\ln(\frac{\pi}{2})$

23 (3p) Integralele $I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f_1(x) dx$ și $I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f_2(x) dx$ sunt egale cu:

☐ A $I_1 = I_2 = \frac{\pi}{2}$ ☐ B $I_1 = I_2 = \frac{\pi}{4}$ ☐ C $I_1 = -\frac{\pi}{2}, I_2 = \frac{\pi}{2}$
☐ D $I_1 = 0, I_2 = \frac{\pi}{2}$ ☐ E $I_1 = \frac{\pi}{2}, I_2 = 0$

Se consideră funcția $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x \ln^2 x$.

24 (3p) Numărul de asimptote ale graficului funcției f este egal cu:

☐ A 1 ☐ B 2 ☐ C 3 ☐ D -1 ☐ E 0

25 (3p) Funcția f are

- ☐ A un punct de maxim local și un punct de minim local
☐ B două puncte de minim local ☐ C două puncte de maxim local
☐ D niciun punct de extrem local ☐ E trei puncte de extrem local

26 (3p) Ecuația $f(x) = m$, unde $m \in \mathbb{R}$ are trei răcini reale distincte dacă

- ☐ A $m \in (0, \frac{4}{e^2})$ ☐ B $m \in (0, 1)$ ☐ C $m \in (\frac{4}{e^2}, +\infty)$
☐ D $m \in (\frac{4}{e^2}, 1)$ ☐ E $m \in (0, \frac{4}{\sqrt{e}})$
-

Fie sistemul de ecuații liniare
$$\begin{cases} x + y - z = 1 \\ x - y + z = -1 \\ -x + y + z = 1 \end{cases}.$$

27 (3p) Determinantul matricii sistemului este egal cu:

- ☐ A -4 ☐ B 0 ☐ C 3 ☐ D 1 ☐ E -1

28 (3p) Soluția sistemului liniar este:

- ☐ A $(0, 0, 0)$ ☐ B $(1, -1, 1)$ ☐ C $(-1, 0, 1)$ ☐ D $(1, 1, 1)$ ☐ E $(0, 1, 0)$
-

29 (3p) Dacă în triunghiul ABC se cunosc lungimile laturilor $BC = 13$, $AB = 12$, $AC = 5$, atunci $\sin B$ este:

- ☐ A 1 ☐ B $\frac{5}{13}$ ☐ C $\frac{12}{13}$ ☐ D 0 ☐ E -1
-

30 (3p) Vârful parabolei asociate funcției de gradul doi $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = -x^2 + 2x - 1$ este:

- ☐ A $V(1, 1)$ ☐ B $V(0, 0)$ ☐ C $V(1, -1)$ ☐ D $V(1, 0)$ ☐ E $V(0, 1)$
-

Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.

Soluții

Model 4

- 1** Condiția de existență a radicalului de ordin doi este: $1 - x^2 \geq 0 \Leftrightarrow x \in [-1, 1]$. Prin ridicare la pătrat obținem ecuația $2x^2 + 2x = 0$, cu soluțiile $x_1 = -1$, $x_2 = 0$. Ambele sunt în $[-1, 1]$ și verifică ecuația dată.

Răspuns corect: B

- 2** Progresia geometrică are primul termen egal cu 1 și rația 2. Atunci suma primilor 10 termeni este $S_{10} = 1 \cdot \frac{2^{10}-1}{2-1} = 1023$.

Răspuns corect: C

- 3** Folosind relațiile lui Viète, $S = x_1 + x_2 = -1$, $P = x_1 x_2 = 1$, rezultă că $\frac{x_1^2 + x_2^2}{x_1 x_2} = \frac{S^2 - 2P}{P} = -1$.

Răspuns corect: A

- 4** Există exact 7 submulțimi formate cu numere pare al mulțimii date: $\{0\}$, $\{2\}$, $\{4\}$, $\{0, 2\}$, $\{0, 4\}$, $\{2, 4\}$, $\{0, 2, 4\}$.

Răspuns corect: D

- 5** Suma coeficienților binomiali ai dezvoltării este $2^n = 1024$, adică $n = 10$.

Răspuns corect: E

- 6** Din $3 = n + 1$ și $m - 1 = 4$ rezultă că $m = 5$, $n = 2$.

Răspuns corect: B

- 7** Prin explicitarea modulelor se obține că $f(x) = \begin{cases} -2 & \text{dacă } x \in (-\infty, -1) \\ 2x & \text{dacă } x \in [-1, 1) \\ 2 & \text{dacă } x \in [1, +\infty) \end{cases}$.

Atunci f este derivabilă în 0 și $f'(0) = 2$.

Răspuns corect: B

- 8** Funcția f este continuă pe $\mathbb{R}$ și derivabilă pe $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$, iar derivata lui f este $f'(x) = \begin{cases} 0 & \text{dacă } x \in (-\infty, -1) \\ 2 & \text{dacă } x \in (-1, 1) \\ 0 & \text{dacă } x \in (1, +\infty) \end{cases}$, punctele -1 și 1 fiind puncte unghiulare.

Răspuns corect: C

- 9** $\int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 2x dx = 1$.

Răspuns corect: E

- 10** Abscisa punctului de intersecție este soluția unică a ecuației $3^x + 4^x = 5^x$, adică $x = 2$. Rezultă că $M(2, 2\log_2 5)$ este punctul de intersecție al traiectoriilor și atunci distanța de la O la M este $2\sqrt{1 + \log_2^2 5}$.
Răspuns corect: **C**
- 11** Avem $\sin x = \frac{1}{2}$ și atunci $\cos 2x = 2 \sin x \cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.
Răspuns corect: **B**
- 12** Aria triunghiului este egală cu $\frac{1}{2} \cdot OA \cdot OB = 1$.
Răspuns corect: **A**
- 13** Valoarea lui $f(0)$ este -1 .
Răspuns corect: **B**
- 14** Cum restul împărțirii polinomului f la $X^2 - 2X + 1 = (X - 1)^2$ trebuie să fie egal cu 0, se obține că $a = 3$.
Răspuns corect: **A**
- 15** Pentru $a = 3$, polinomul f devine $(X - 1)^3$ și atunci 1 este rădăcină triplă.
Răspuns corect: **D**
- 16** Cum $\lim_{x \nearrow 0} f(x) = 1$ și $\lim_{x \searrow 0} f(x) = 1$, rezultă $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$.
Răspuns corect: **C**
- 17** Cum $f'_s(0) = \lim_{x \nearrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 1$ și $f'_d(0) = \lim_{x \searrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = -1$, rezultă că $f'_s(0) + f'_d(0) = 0$.
Răspuns corect: **A**
- 18** Din definiția unei primitive rezultă că aceasta este o funcție derivabilă pe $\mathbb{R}$ și prin urmare continuă în $x = 0$. Atunci variantele A și E se exclud și prin derivarea lui F rămâne doar varianta D.
Răspuns corect: **D**
- 19** Rangul matricei poate fi 0, pentru $a = 0$, sau 1, pentru $a \neq 0$.
Răspuns corect: **B**
- 20** Pentru $a = 1$, $A^2 = 3A$, $A^3 = 3^2A$ și atunci $A^{2023} = 3^{2022}A$.
Răspuns corect: **D**

21 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (f_1(x) + f_2(x)) \, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx = \frac{\pi}{2}.$

Răspuns corect: **C**

22 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (f_1(x) - f_2(x)) \, dx = -\ln(\sin x + \cos x)|_0^{\frac{\pi}{2}} = 0.$

Răspuns corect: **A**

23 Cum $I_1 + I_2 = \frac{\pi}{2}$ și $I_1 - I_2 = 0$, rezultă că $I_1 = I_2 = \frac{\pi}{4}.$

Răspuns corect: **B**

24 Cum $\lim_{x \searrow 0} f(x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$ și $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \infty$, rezultă că graficul lui f nu are nici o asimptotă.

Răspuns corect: **E**

25 Derivata funcției f , $f'(x) = \ln x(\ln x + 2)$, $x \in (0, +\infty)$, are două zerouri, $x_1 = 1$ și $x_2 = \frac{1}{e^2}$, din care unul este punct de maxim local și unul este punct de minim local.

Răspuns corect: **A**

26 Din tabloul de variație al funcției f și din graficul lui f se deduce că intersecția dintre graficul lui f și dreapta orizontală $y = m$ are trei puncte de intersecție distincte dacă și numai dacă $0 < m < \frac{4}{e^2}.$

Răspuns corect: **A**

27 Determinantul matricii este egal cu $-4.$

Răspuns corect: **A**

28 Soluția unică a sistemului liniar este $(0, 1, 0).$

Răspuns corect: **E**

29 Întrucât $5^2 + 12^2 = 13^2$, rezultă că triunghiul ABC este dreptunghic în A și atunci $\sin B = \frac{AC}{BC} = \frac{5}{13}.$

Răspuns corect: **B**

30 Vârful parabolei are coordonatele $x_V = -\frac{b}{2a} = 1$ și $y_V = -\frac{\Delta}{4a} = 0.$

Răspuns corect: **D**

Universitatea din Craiova
Facultatea de Automatică, Calculatoare și Electronică
Examen de admitere la licență - Sesiunea iulie 2023
Domeniul Calculatoare și Tehnologia Informației
Proba scrisă la matematică

Model 5

-
- 1** (3p) Fie numărul complex $z = 1 - i$. Atunci $(z - 1)^{2023}$ este:
- ☐ A -1 ☐ B 0 ☐ C $-i$ ☐ D i ☐ E 1
-
- 2** (3p) Se consideră progresia aritmetică $a_n = n - 4$, $n \in \mathbb{N}^*$. Suma primilor zece termeni este:
- ☐ A 10 ☐ B 15 ☐ C 0 ☐ D -10 ☐ E 30
-
- 3** (3p) Ecuația $4^x - 2^{x+1} - 8 = 0$ are rădăcinile:
- ☐ A $-2, 4$ ☐ B 4 ☐ C $0, 2$ ☐ D $0, 4$ ☐ E 2
-
- 4** (3p) Suma $S = C_n^0 + 2C_n^1 + 4C_n^2 + \dots + 2^n C_n^n$, $n \in \mathbb{N}$, este:
- ☐ A 2^{2n} ☐ B 1 ☐ C 2^n ☐ D 3^n ☐ E 3^{2n}
-
- 5** (3p) Ecuația dreptei care trece prin punctul $A(1, -1)$ și este perpendiculară pe dreapta de ecuație $x + y - 2 = 0$ este:
- ☐ A $x - y + 2 = 0$ ☐ B $x + y + 2 = 0$ ☐ C $x - y - 2 = 0$
☐ D $2x - y + 2 = 0$ ☐ E $x + y - 2 = 0$
-
- 6** (3p) Funcția de gradul doi $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = ax^2 + bx + c$, al cărei grafic conține punctele $A(-1, 0)$, $B(1, 2)$ și originea O a reperului cartezian xOy este:
- ☐ A $f(x) = x^2 + x + 1$ ☐ B $f(x) = x^2 + x - 1$ ☐ C $f(x) = x^2 + x$
☐ D $f(x) = 2x^2 + x + 1$ ☐ E $f(x) = 2x^2 - x + 1$
-
- 7** (3p) Relativ la reperul cartezian ortonormat xOy , două puncte M_1 și M_2 se deplasează în plan urmând traiectoriile rectilinii $d_1 : y = 2x + 1$ și $d_2 : y = 5x - 2$. Atunci punctul de intersecție al traiectoriilor, $d_1 \cap d_2 = \{M\}$, este:
- ☐ A $M(1, 1)$ ☐ B $M(-1, 0)$ ☐ C $M(1, 3)$ ☐ D $M(0, 0)$ ☐ E $M(3, 1)$
-
- 8** (3p) Media geometrică a numerelor $\sqrt{5 + \sqrt{5}}$ și $\sqrt{5 - \sqrt{5}}$ este:
- ☐ A $\sqrt[4]{20}$ ☐ B $2\sqrt{5}$ ☐ C $\sqrt[4]{5}$ ☐ D $\sqrt{5}$ ☐ E 1
-

Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x+2}{x^2+x+1}$.

9 (3p) Limita $\lim_{x \rightarrow \infty} xf(x)$ este:

- ☐ A $+\infty$ ☐ B 0 ☐ C -1 ☐ D 1 ☐ E $-\infty$

10 (3p) Derivata funcției f este:

- ☐ A $f'(x) = -\frac{x^2+4x+1}{(x^2+x+1)^2}$ ☐ B $f'(x) = -\frac{x^2+1}{(x^2+x+1)^2}$ ☐ C $f'(x) = -\frac{x^2+4x+1}{x^2+x+1}$
☐ D $f'(x) = \frac{x^2+4x+1}{(x^2+x+1)^2}$ ☐ E $f'(x) = -\frac{1}{(x^2+x+1)^2}$

11 (3p) Integrala $\int_0^1 f(x) dx$ este:

- ☐ A 0 ☐ B $\ln 2$ ☐ C $\sqrt{2}$ ☐ D $2 \ln 5$ ☐ E $\ln \sqrt{3} + \frac{\pi\sqrt{3}}{6}$

12 (3p) Dacă $\sin x = \frac{5}{13}$, $x \in (0, \frac{\pi}{2})$, atunci $\sin 2x + \cos 2x$ este:

- ☐ A 0 ☐ B $\frac{239}{169}$ ☐ C $\frac{144}{169}$ ☐ D $-\frac{5}{13}$ ☐ E $\frac{1}{2}$

13 (3p) Dacă $BC = 10$, $AB = 6$ și $AC = 8$, atunci raza cercului circumscris triunghiului ABC este:

- ☐ A 6 ☐ B $\frac{5}{2}$ ☐ C -1 ☐ D 1 ☐ E 5

Se consideră polinomul cu coeficienți reali $f = X^3 - X^2 - X + 1$ cu rădăcinile x_1, x_2, x_3 .

14 (3p) Câtul q și restul r al împărțirii lui f la polinomul $g = X + 1$ sunt:

- ☐ A $q = (X - 1)^2$, $r = 1$ ☐ B $q = X - 1$, $r = 0$ ☐ C $q = (X - 1)^2$, $r = 0$
☐ D $q = (X - 1)^2$, $r = X + 1$ ☐ E $q = (X - 1)^2$, $r = (X + 1)^2$

15 (3p) Rădăcinile polinomului f sunt:

- ☐ A $x_1 = -1$, $x_2 = x_3 = 1$ ☐ B $x_1 = -1$, $x_2 = 0$, $x_3 = 1$ ☐ C $x_1 = x_2 = x_3 = 1$
☐ D $x_1 = x_2 = x_3 = -1$ ☐ E $x_1 = -1$, $x_2 = 1 + i$, $x_3 = 1 - i$

16 (3p) Suma $S = x_1^{2023} + x_2^{2023} + x_3^{2023}$ este:

- ☐ A -1 ☐ B 0 ☐ C $2i$ ☐ D 1 ☐ E $-2i$

Fie funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definită prin

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + x + a & \text{dacă } x < 0 \\ \frac{e^x}{x+1} & \text{dacă } x \geq 0, \text{ unde } a \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

17 (3p) Funcția f este continuă dacă și numai dacă valoarea lui a este:

- ☐ A e ☐ B 2 ☐ C -1 ☐ D 1 ☐ E 0

18 (3p) Pentru $a = 1$, valoarea sumei $S = f'(-\frac{1}{2}) + f'_s(0) + f'_d(0)$ este:

- ☐ A -1 ☐ B 1 ☐ C 0 ☐ D e ☐ E e
-

Fie matricea $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ m & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, unde $m \in \mathbb{R}$.

19 (3p) Dacă $\det A = 0$, atunci m este:

- ☐ A 2 ☐ B 1 ☐ C 0 ☐ D $\frac{1}{2}$ ☐ E 3

20 (3p) Pentru $m = 1$, inversa matricii A este:

- ☐ A $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ☐ B $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ☐ C $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -1 & \frac{3}{2} \\ 1 & -1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$
- ☐ D $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ -1 & -1 & 1 \\ \frac{3}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$ ☐ E $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$
-

Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \setminus \{-1\} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x-1}{x+1}$.

21 (3p) Ecuațiile asimptotelor la graficul funcției f sunt:

- ☐ A $x = -1, y = x + 1$ ☐ B $x = -1, y = x$ ☐ C $x = 1, y = 1$
- ☐ D $x = -1, y = 1$ ☐ E $x = -1, y = 0$

22 (3p) Integrala $\int_0^1 f(x)dx$ este:

- ☐ A 1 ☐ B $1 - 2 \ln 2$ ☐ C $1 - \ln 2$ ☐ D $1 + 2 \ln 2$ ☐ E $\ln 2$

23 (3p) Derivata inversei funcției f în punctul -1 , $(f^{-1})'(-1)$, este egală cu:

- ☐ A 1 ☐ B 2 ☐ C 0 ☐ D -1 ☐ E $\frac{1}{2}$
-

Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x + e^{-x}$.

24 (3p) Dacă m este numărul de asimptote ale graficului funcției f și n este numărul de puncte de extrem ale funcției f , atunci $m + n$ este egal cu:

- ☐ A 4 ☐ B 0 ☐ C 1 ☐ D 2 ☐ E 3

25 (3p) Funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow [1, +\infty)$, $f(x) = x + e^{-x}$ este

- ☐ A bijectivă ☐ B surjectivă, dar nu injectivă ☐ C injectivă, dar nu surjectivă
- ☐ D nici injectivă, nici surjectivă ☐ E inversabilă

- 26** (3p) Ecuația $f(x) = m$, unde $m \in \mathbb{R}$ are două răcini reale distincte dacă
- ☐ A $m \in (0, 1)$ ☐ B $m < 1$ ☐ C $m > 1$ ☐ D $m \geq 1$ ☐ E $m = 1$
-

Fie funcția $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x-1}{\sqrt{x^2-1}}$, $D \subseteq \mathbb{R}$.

- 27** (3p) Domeniul maxim de definiție al lui f :
- ☐ A $(-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$ ☐ B $\mathbb{R}$ ☐ C $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$
☐ D $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$ ☐ E $(-1, 1)$

- 28** (3p) Limita $\lim_{a \rightarrow \infty} \int_{a+1}^{a+2} f(x) \sqrt{x^2 - 1} dx$ este:

☐ A 0 ☐ B 1 ☐ C $-\infty$ ☐ D -1 ☐ E $+\infty$

- 29** (3p) Relativ la baza ortonormăă $\{\vec{i}, \vec{j}\}$ a reperului cartezian xOy , se consideră vectorii $\vec{a} = 3\vec{i} + (m+1)\vec{j}$, $\vec{b} = -2\vec{i} + \vec{j}$, unde $m \in \mathbb{R}$. Dacă vectorii $\vec{a}$ și $\vec{b}$ sunt ortogonali, atunci m ia valoarea:

☐ A 5 ☐ B 0 ☐ C $-\frac{5}{2}$ ☐ D 0 ☐ E $\frac{1}{2}$

- 30** (3p) Mulțimea soluțiilor reale ale ecuației $\sqrt{x-x^2} = 1-x$ este::

☐ A $\{\frac{1}{2}, 1\}$ ☐ B $\{0, 1\}$ ☐ C $\{1\}$ ☐ D $\{-1, 1\}$ ☐ E

Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.

- 1** Cum $z - 1 = -i$ rezultă că $(z - 1)^{2023} = (-i)^{2023} = -i^3 = i$.

Răspuns corect: **D**

- 2** Progresia aritmetică are primul termen egal cu -3 și rația 1 . Atunci suma primilor 10 termeni este $S_{10} = \frac{(-6+9 \cdot 1) \cdot 10}{2} = 15$.

Răspuns corect: **B**

- 3** După substituția $2^x = t$, ecuația $4^x - 2^{x+1} - 8 = 0$ devine $t^2 - 2t - 8 = 0$, cu rădăcinile $t_1 = -2$, $t_2 = 4$. Rezultă $x = 2$ soluție unică.

Răspuns corect: **E**

- 4** Folosind binomul lui Newton, suma este egală cu $(1 + 2)^n = 3^n$.

Răspuns corect: **D**

- 5** Panta dreptei $x + y - 2 = 0$ este -1 și atunci panta dreptei cerute este 1 . Rezultă că aceasta are ecuația $y - (-1) = 1 \cdot (x - 1)$ sau $x - y - 2 = 0$.

Răspuns corect: **C**

- 6** Din $f(0) = 0$, $f(-1) = 0$ și $f(1) = 2$, rezultă că $a = b = 1$, $c = 0$.

Răspuns corect: **C**

- 7** Din $2x + 1 = 5x - 2$ rezultă $x = 1$ și atunci $y = 3$, adică $M(1, 3)$.

Răspuns corect: **D**

- 8** Media geometrică a numerelor este $\sqrt{\sqrt{5 + \sqrt{5}} \cdot \sqrt{5 - \sqrt{5}}} = \sqrt[4]{20}$.

Răspuns corect: **A**

- 9** $\lim_{x \rightarrow \infty} x f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 2x}{x^2 + x + 1} = 1$.

Răspuns corect: **D**

- 10** $f'(x) = \frac{x^2 + x + 1 - (x+2)(2x+1)}{(x^2 + x + 1)^2} = -\frac{x^2 + 4x + 1}{(x^2 + x + 1)^2}$.

Răspuns corect: **A**

- 11** $\int_0^1 f(x) dx = \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{(x^2 + x + 1)'}{x^2 + x + 1} dx + \frac{3}{2} \int_0^1 \frac{1}{(x + \frac{1}{2})^2 + \frac{\sqrt{3}}{2}} dx =$
 $= \frac{1}{2} \ln(x^2 + x + 1) \Big|_0^1 + \sqrt{3} \arctan \left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}} \right) \Big|_0^1 = \ln \sqrt{3} + \frac{\pi \sqrt{3}}{6}$.

Răspuns corect: **E**

12 Avem $\sin 2x + \cos 2x = 2 \sin x \cos x + 2 \cos^2 x - 1 = \frac{239}{169}$.

Răspuns corect: **B**

13 Raza cercului circumscris triunghiului dreptunghic ABC este $R = \frac{BC}{2} = 5$.

Răspuns corect: **E**

14 Câtul împărțirii lui f la polinomul $g = X + 1$ este $q = X^2 - 2X + 1 = (X - 1)^2$, iar restul $r = 0$.

Răspuns corect: **C**

15 Cum $f = (X + 1)(X - 1)^2$, rezultă că rădăcinile lui f sunt $x_1 = -1$, $x_2 = x_3 = 1$.

Răspuns corect: **A**

16 Suma cerută este egală cu 1.

Răspuns corect: **D**

17 Cum $\lim_{x \nearrow 0} f(x) = a$, $\lim_{x \searrow 0} f(x) = 1$ și $f(0) = 1$, rezultă că $a = 1$.

Răspuns corect: **D**

18 Din $f'(-\frac{1}{2}) = 0$, $f'_s(0) = 1$ și $f'_d(0) = 0$, rezultă că suma cerută este egală cu 1.

Răspuns corect: **B**

19 Determinantul matricei A este $4 - 2m$ și atunci $\det A = 0 \Leftrightarrow m = 2$.

Răspuns corect: **A**

20 Pentru $m = 1$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\det A = 2$ și $A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot A^* = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -1 & \frac{3}{2} \\ 1 & -1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

Răspuns corect: **C**

21 Cum $\lim_{x \pm \infty} f(x) = 1$ și $\lim_{x \nearrow -1} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \searrow -1} f(x) = -\infty$, rezultă că $y = 1$ este asimptotă orizontală la $\pm\infty$, $x = -1$ este asimptotă verticală la stânga către $+\infty$, $x = -1$ este asimptotă verticală la dreapta către $-\infty$.

Răspuns corect: **D**

22 $\int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 dx - 2 \int_0^1 \frac{1}{x+1} dx = 1 - 2 \ln 2$.

Răspuns corect: **B**

- 23** Cum $f : (-1, +\infty) \rightarrow (-\infty, 1)$ este o funcție inversabilă și derivabilă, iar $f(0) = -1$ și $f'(0) = 2 \neq 0$, rezultă că inversa $f^{-1} : (-\infty, 1) \rightarrow (-1, +\infty)$ este derivabilă în punctul -1 și $(f^{-1})'(-1) = \frac{1}{f'(0)} = \frac{1}{2}$.

Răspuns corect: **E**

- 24** Cum f este continuă pe $\mathbb{R}$, $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \infty$, dar $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = 1$, $\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = -\infty$ rezultă că graficul lui f doar o asimptotă, mai precis $y = x$ asimptotă oblică la ∞ . Derivata lui f , $f'(x) = 1 - e^{-x}$, $x \in \mathbb{R}$, are un singur zerou, $x = 0$, care este unicul punct de extrem (punct de minim global). Deci $m = 1$ și $n = 1$.

Răspuns corect: **D**

- 25** Din tabloul de variație al funcției $f : \mathbb{R} \rightarrow [1, +\infty)$ se trage concluzia că funcția f este surjectivă, dar nu este injectivă.

Răspuns corect: **B**

- 26** Din tabloul de variație al funcției f și din graficul lui f se deduce că intersecția dintre graficul lui f și dreapta orizontală $y = m$ are două puncte de intersecție distincte dacă și numai dacă $m > 1$.

Răspuns corect: **C**

- 27** Condiția de existență a radicalului la numitor: $x^2 - 1 > 0$ implică $D = (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$.

Răspuns corect: **C**

- 28** Cum $\int_{a+1}^{a+2} f(x)\sqrt{x^2-1} dx = \int_{a+1}^{a+2} (x-1) dx = \left(\frac{x^2}{2} - x\right)\Big|_{a+1}^{a+2} = a + \frac{1}{2}$, rezultă că limita este egală cu $+\infty$.

Răspuns corect: **E**

- 29** Condiția de ortogonalitate este: $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Leftrightarrow 3 \cdot (-2) + (m+1) \cdot 1 = 0 \Leftrightarrow m = 5$.

Răspuns corect: **A**

- 30** Condițiile de existență $x - x^2 \geq 0$ și $1 - x \geq 0$ înseamnă că soluțiile sunt în intervalul $[0, 1]$. Prin ridicarea la pătrat a ecuației date, rezultă ecuația $2x^2 - 3x + 1 = 0$, cu rădăcinile $x_1 = \frac{1}{2}$, $x_2 = 1$.

Răspuns corect: **A**

Universitatea din Craiova
Facultatea de Automatică, Calculatoare și Electronică
Examen de admitere la licență - Sesiunea iulie 2023
Domeniul Calculatoare și Tehnologia Informației
Proba scrisă la matematică

Model 6

1 (3p) Dacă punctul $M(-1, m)$ aparține graficului funcției $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - x$, atunci numărul real m este:

- ☐ A -2 ☐ B 1 ☐ C 0 ☐ D -1 ☐ E 2

2 (3p) Modulul numărului complex $z = [(\sqrt{7} - 1) + i(\sqrt{7} + 1)]^{2019}$ este

- ☐ A 4^{2023} ☐ B 2^{2023} ☐ C 7 ☐ D 0 ☐ E $\sqrt{7}^{2023}$

3 (3p) Mulțimea soluțiilor ecuației $25^x + 35^x = 2 \cdot 49^x$ este:

- ☐ A $\{2\}$ ☐ B $\{0\}$ ☐ C $\{0, 1\}$ ☐ D $\{1\}$ ☐ E $\{0, 2\}$

4 (3p) Cel mai mare termen al dezvoltării $(\frac{1}{2} + \frac{3}{4})^{1000}$ este:

- ☐ A T_{598} ☐ B T_{600} ☐ C T_{599} ☐ D T_{1001} ☐ E T_1

5 (3p) Dacă x_1, x_2, x_3 sunt rădăcinile ecuației $x^3 - 2x^2 + 2x + 17 = 0$, atunci suma $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$ este:

- ☐ A 1 ☐ B 4 ☐ C 2 ☐ D 0 ☐ E -2

6 (3p) Relativ la reperul cartezian ortonormat xOy , se consideră punctele $A(1, 0)$, $B(1, 1)$, $C(0, 1)$. Dacă punctul B este atât mijlocul segmentului AA' cât și mijlocul segmentului CC' , atunci punctele A' și C' sunt:

- ☐ A $A'(1, 2), C'(2, 1)$ ☐ B $A'(1, -1), C'(-1, 1)$ ☐ C $A'(2, 2), C'(2, 1)$
☐ D $A'(1, 2), C'(2, 2)$ ☐ E $A'(-1, 2), C'(2, -1)$

7 (3p) Fie triunghiul ABC pentru care avem $\sin(A + B) + \cos C = 1$. Atunci unghiul C are măsura egală cu:

- ☐ A 45° ☐ B 90° ☐ C 60° ☐ D 30° ☐ E 120°

8 (3p) Pe mulțimea numerelor complexe $\mathbb{C}$ se consideră legea de compoziție:

$$z_1 * z_2 = z_1 z_2 + z_1 + z_2 \text{ pentru orice } z_1, z_2 \in \mathbb{C}.$$

Atunci determinați răspunsul unic corect dintre variantele:

- ☐ A elementul neutru este -1 ☐ B $z * (-1) = -1$, pentru orice $z \in \mathbb{C}$
☐ C toate elementele sunt simetrizabile ☐ D elementul neutru este 1
☐ E $(\mathbb{C}, *)$ este grup comutativ
-

Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} \cos \frac{1}{x} & \text{dacă } x < 0 \\ 0 & \text{dacă } x = 0 \\ e^{-\frac{1}{x}} & \text{dacă } x > 0 \end{cases}$.

9 (3p) Limita $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ este:

- ☐ A 0 ☐ B $+\infty$ ☐ C nu există ☐ D e ☐ E $-\infty$

10 (3p) Funcția f este

- ☐ A continuă pe $\mathbb{R}$ și derivabilă pe $\mathbb{R}$ ☐ B continuă pe $\mathbb{R}$ și derivabilă pe $\mathbb{R} \setminus \{0\}$
☐ C continuă pe $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ și derivabilă pe $\mathbb{R} \setminus \{-1, 0, 1\}$ ☐ D continuă pe $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ și derivabilă pe $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ ☐ E continuă pe $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ și derivabilă pe $\mathbb{R}$

11 (3p) Limita $\lim_{a \rightarrow 0} \int_1^a \frac{1}{x} e^{-\frac{1}{x}} dx$ este:

- ☐ A 0 ☐ B 1 ☐ C $\frac{1}{e}$ ☐ D $1 - e$ ☐ E $\frac{1-e}{e}$
-

12 (3p) Dacă $\sin a = \frac{1}{2}$ și $a \in (0, \frac{\pi}{2})$, atunci $\frac{\sin a + \sqrt{3} \cos a}{\sin a - 2\sqrt{3} \cos a}$ este:

- ☐ A $\frac{1}{2}$ ☐ B $-\frac{1}{\sqrt{3}}$ ☐ C $-\frac{4}{5}$ ☐ D $-\frac{2}{5}$ ☐ E 0
-

13 (3p) Dacă $BC = 10$, $AB = 6$ și $AC = 8$, atunci raza cercului înscris în triunghiul ABC este:

- ☐ A $\frac{1}{2}$ ☐ B 1 ☐ C 2 ☐ D 3 ☐ E $\frac{3}{2}$
-

Fie matricea

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \omega & \omega^2 \\ 1 & \omega^2 & \omega \end{pmatrix},$$

unde ω este una dintre rădăcinile complexe ale ecuației $x^3 - 1 = 0$.

14 (3p) Determinantul matricei A este:

- ☐ A 1 ☐ B ω ☐ C $3\omega(\omega - 1)$ ☐ D $\omega^2 - \omega$ ☐ E -1

15 (3p) Matricea A^2 este egală cu:

- ☐ A $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$ ☐ B $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ ☐ C $\begin{pmatrix} \omega & 0 & 0 \\ 0 & \omega^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$\boxed{\text{D}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \omega & 0 \\ 0 & 0 & \omega^2 \end{pmatrix} \quad \boxed{\text{E}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

16 (3p) Pentru orice $n \in \mathbb{N}$, matricea A^{2n} este:

- ☐ A egală cu A^2 ☐ B egală cu A^4 ☐ C egală cu A
☐ D o matrice cu toate elementele numere reale ☐ E egală cu $I_3 - A$
-

Fie funcția $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \ln x - \frac{1}{x}$, pentru orice $x > 0$.

17 (3p) Valoarea lui $f(1)$ este:

- ☐ A 1 ☐ B $-\frac{1}{e}$ ☐ C -1 ☐ D 1 ☐ E 0

18 (3p) Imaginea intervalului $(0, +\infty)$ prin funcția f , $Im f = f((0, +\infty))$ este:

- ☐ A $(0, +\infty)$ ☐ B $(1, +\infty)$ ☐ C $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ ☐ D $\mathbb{R}$ ☐ E $(0, 1)$

19 (3p) Integrala $\int_1^e x f(x) dx$ este:

- ☐ A $\frac{e-1}{4}$ ☐ B $\frac{e^2+e}{2}$ ☐ C $\frac{e^2}{2}$ ☐ D $\frac{e^2-3e}{4}$ ☐ E $\frac{e^2-4e+5}{4}$
-

Fie matricea $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

20 (3p) Determinantul matricii A este:

- ☐ A $a_1 a_2 a_3$ ☐ B $(a_2 + a_1)(a_3 + a_1)(a_3 + a_2)$ ☐ C $(a_2 - a_1)(a_3 - a_1)(a_3 - a_2)$
☐ D $a_1 + a_2 + a_3$ ☐ E $a_1 a_2 + a_2 a_3 + a_3 a_1$

21 (3p) Dacă A^t notează transpusa matricii A , atunci determinantul matricii AA^t este:

- ☐ A $(a_1 a_2 + a_2 a_3 + a_3 a_1)^2$ ☐ B $(a_1 + a_2 + a_3)^2$ ☐ C $a_1^2 a_2^2 a_3^2$
☐ D $(a_2 - a_1)^2 (a_3 - a_1)^2 (a_3 - a_2)^2$ ☐ E 1
-

22 (3p) Dacă $a_1 = -1$, $a_2 = 0$, $a_3 = 1$, atunci mulțimea soluțiilor sistemului liniar omogen de matrice A este:

- ☐ A $\{(1, 1, 1)\}$ ☐ B $\{(0, 0, 0)\}$ ☐ C $\{(a, a, a) | a \in \mathbb{R}\}$
☐ D $\{(-1, 0, 1)\}$ ☐ E $\{(a, -a, a) | a \in \mathbb{R}\}$
-

Se consideră funcția $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x^2 + x + 1}$.

23 (3p) Domeniul de definiție D al funcției este:
☐ A $\mathbb{R}$ ☐ B $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ ☐ C $(0, +\infty)$ ☐ D $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$ ☐ E $(-1, +\infty)$

24 (3p) Derivata funcției f este:
☐ A $f'(x) = -\frac{1}{(x^2+x+1)^2}$ ☐ B $f'(x) = -\frac{x}{(x^2+x+1)^2}$ ☐ C $f'(x) = -\frac{2x+1}{(x^2+x+1)^2}$
☐ D $f'(x) = \frac{x+1}{x^2+x+1}$ ☐ E $f'(x) = -\frac{2x+1}{x^2+x+1}$

25 (3p) Integrala $\int_0^1 f(x)dx$ este:
☐ A $\frac{\pi}{\sqrt{3}}$ ☐ B $\frac{\pi}{3}$ ☐ C π ☐ D $\frac{1}{\sqrt{3}}$ ☐ E $\frac{\pi}{3\sqrt{3}}$

Pentru fiecare număr natural n , se consideră numărul real

$$I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{x^2 + 1} dx.$$

26 (3p) Valorile integralelor I_0 și I_1 sunt:
☐ A $I_0 = \frac{\pi}{2}, I_1 = \ln \sqrt{2}$ ☐ B $I_0 = \frac{\pi}{4}, I_1 = \ln 2$ ☐ C $I_0 = \frac{\pi}{4}, I_1 = \ln \sqrt{2}$
☐ D $I_0 = \frac{\pi}{4}, I_1 = \sqrt{2}$ ☐ E $I_0 = \pi, I_1 = \ln 2$

27 (3p) Pentru orice $n \geq 2$, suma $I_{n-2} + I_n$ este egală cu:
☐ A $\frac{1}{n+1}$ ☐ B $\frac{1}{n}$ ☐ C $\frac{2}{n-1}$ ☐ D $\frac{1}{n+2}$ ☐ E $\frac{1}{n-1}$

28 (3p) Șirul de numere reale $(I_n)_n$ verifică:
☐ A $\frac{1}{2(n+1)} \leq I_n \leq \frac{n}{2(n-1)}, \forall n \geq 2$ ☐ B $\frac{1}{2(n+1)} \leq I_n \leq \frac{1}{2(n-1)}, \forall n \geq 2$
☐ C $\frac{1}{n+1} \leq I_n \leq \frac{1}{n-1}, \forall n \geq 2$ ☐ D $0 \leq I_n \leq \frac{1}{2n}, \forall n \geq 2$ ☐ E $\frac{1}{2n} \leq I_n \leq \frac{1}{n}, \forall n \geq 2$

Fie funcția $f: \mathbb{R} \setminus \{-1, 0\} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}$.

29 (3p) Asimptotele graficului funcției f au ecuațiile:
☐ A $x = 0, x = 1, y = 0$ ☐ B $x = 0, y = 0$ ☐ C $x = -1, x = 0, y = 1$
☐ D $x = -1, x = 0, y = 0$ ☐ E $x = -1, x = 0$

30 (3p) Ecuația $f(x) = m$ are exact o rădăcină reală dacă și numai dacă:
☐ A $m \in [-4, 0]$ ☐ B $m = -4$ ☐ C $m \in (-\infty, -4]$
☐ D $m \in (0, +\infty)$ ☐ E $m \in (-4, 0]$

Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
 Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.

1 Din $f(-1) = m$ rezultă că $m = 2$.

Răspuns corect: **E**

2 Modulul lui $z = [(\sqrt{7} - 1) + i(\sqrt{7} + 1)]^{2019}$ este $|(\sqrt{7} - 1) + i(\sqrt{7} + 1)|^{2023} = 4^{2023}$.

Răspuns corect: **A**

3 După împărțirea cu 7^x și folosind substituția $(\frac{5}{7})^x = t$, ecuația devine $t^2 + t - 2 = 0$, cu rădăcinile $t_1 = -2$, $t_2 = 1$. Cum $t > 0$, rezultă că $(\frac{5}{7})^x = 1$ și $x = 0$ este soluție unică.

Răspuns corect: **B**

4 Termenul de rang $k + 1$ al dezvoltării $(\frac{1}{2} + \frac{3}{4})^{1000}$ este $T_{k+1} = C_{1000}^k (\frac{1}{2})^{1000-k} (\frac{3}{4})^k$. Cum $\frac{T_{k+2}}{T_{k+1}} \geq 1 \Leftrightarrow \frac{1000-k}{k+1} \cdot \frac{3}{2} \geq 1$, avem că $T_{k+2} \geq T_{k+1} \Leftrightarrow k = 0, 1, \dots, 597$ și $T_{k+2} < T_{k+1} \Leftrightarrow k = 598, 599, \dots, 999$. Rezultă că T_{599} este cel mai mare termen.

Răspuns corect: **C**

5 Folosind relațiile lui Viète, avem $S_1 = x_1 + x_2 + x_3 = 2$, $S_2 = x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 = 2$, de unde rezultă $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = S_1^2 - 2S_2 = 0$.

Răspuns corect: **D**

6 Din $x_B = \frac{x_A + x_{A'}}{2} = \frac{x_C + x_{C'}}{2}$ și $y_B = \frac{y_A + y_{A'}}{2} = \frac{y_C + y_{C'}}{2}$, rezultă că $A'(1, 2)$, $C'(2, 1)$.

Răspuns corect: **A**

7 Cum $A + B = \pi - C$, avem că $\sin C + \cos C = 1$. Prin ridicare la pătrat obținem $\sin 2C = 0$, adică $2C = \pi$ sau $C = \frac{\pi}{2}$.

Răspuns corect: **B**

8 Se observă că $z * (-1) = -1$, pentru orice $z \in \mathbf{C}$, 0 este element neutru și -1 nu este element simetrizabil.

Răspuns corect: **B**

9 Se observă că limita la stânga, $\lim_{x \nearrow 0} f(x) = \lim_{x \nearrow 0} \cos \frac{1}{x}$, nu există, deși limita la dreapta, $\lim_{x \searrow 0} e^{-\frac{1}{x}} = 0 = f(0)$. Deci nu există limita în 0 .

Răspuns corect: **C**

10 Se observă că continuă pe $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ și derivabilă pe $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, iar derivata este

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2} \sin \frac{1}{x} & \text{dacă } x < 0 \\ \frac{1}{x^2} e^{-\frac{1}{x}} & \text{dacă } x > 0 \end{cases}.$$

Răspuns corect: **D**

11 Cum $\int_1^a \frac{1}{x^2} e^{-\frac{1}{x}} dx = \int_1^a \left(e^{-\frac{1}{x}}\right)' dx = e^{-\frac{1}{x}} \Big|_1^a = e^{-\frac{1}{a}} - e^{-1}$, rezultă că limita este $\frac{e-1}{e}$.

Răspuns corect: **E**

12 Cum $a \in (0, \frac{\pi}{2})$, avem $\cos a = \frac{\sqrt{3}}{2}$ și atunci $\frac{\sin a + \sqrt{3} \cos a}{\sin a - 2\sqrt{3} \cos a} = -\frac{4}{5}$.

Răspuns corect: **C**

13 Raza cercului înscris în triunghiul ABC este $r = \frac{S}{p} = 1$, unde $S = \frac{AB \cdot AC}{2} = 24$ este aria triunghiului ABC și $p = \frac{48}{2} = 24$ este semiperimetrul triunghiului ABC .

Răspuns corect: **B**

14 Determinantul $\det(A) = 3\omega(\omega - 1)$.

Răspuns corect: **C**

15 Prin calcul, $A^2 = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$.

Răspuns corect: **A**

16 Prin calcul, $A^4 = 3^2 I_3$, $A^6 = 3^2 A^2$, $A^8 = 3^4 I_3$. Prin metoda inducției matematice se poate demonstra că, pentru orice număr natural n , A^{2n} este o matrice cu toate elementele numere reale.

Răspuns corect: **D**

17 Prin calcul avem $f(1) = -1$.

Răspuns corect: **C**

18 Din $f'(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} > 0$, pentru orice $x > 0$, rezultă că f este o funcție strict crescătoare pe intervalul $(0, +\infty)$. Cum $\lim_{x \searrow 0} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ și f este continuă, avem că imaginea funcției este $\mathbb{R}$.

Răspuns corect: **D**

19 Integrala $\int_1^e x f(x) dx$ este egală cu $\int_1^e (x \ln x - 1) dx = \frac{e^2 - 4e + 5}{4}$, dacă se aplică integrarea prin părți pentru integrala $\int_1^e x \ln x dx$.

Răspuns corect: **E**

20 Determinantul de tip Vandermonde este $(a_2 - a_1)(a_3 - a_1)(a_3 - a_2)$.

Răspuns corect: **C**

21 Avem că $\det(AA^t) = \det A \det A^t = (\det A)^2 = (a_2 - a_1)^2(a_3 - a_1)^2(a_3 - a_2)^2$.

Răspuns corect: **D**

22 Cum $\det A = 2 \neq 0$, rezultă că sistemul linear omogen are soluția unică nulă $(0, 0, 0)$.

Răspuns corect: **B**

23 Cum $x^2 + x + 1 > 0$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$, rezultă că domeniul de definiție este $D = \mathbb{R}$.

Răspuns corect: **A**

24 f este derivabilă pe $\mathbb{R}$ și $f'(x) = -\frac{2x+1}{(x^2+x+1)^2}$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Răspuns corect: **C**

25 Integrala $\int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 \frac{1}{(x+\frac{1}{2})^2 + (\frac{\sqrt{3}}{2})^2} dx = \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \left(\frac{x+\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} \right) \Big|_0^1 = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}$

Răspuns corect: **E**

26 $I_0 = \int_0^1 \frac{1}{x^2+1} dx = \operatorname{arctg} x \Big|_0^1 = \frac{\pi}{4}$ și $I_1 = \int_0^1 \frac{x}{x^2+1} dx = \frac{1}{2} \ln(x^2+1) \Big|_0^1 = \ln \sqrt{2}$.

Răspuns corect: **C**

27 $\forall n \geq 2$, avem $I_{n-2} + I_n = \int_0^1 \frac{x^{n-2} + x^n}{x^2+1} dx = \int_0^1 x^{n-2} dx = \frac{1}{n-1}$.

Răspuns corect: **E**

28 Cum șirul $(I_n)_{n \geq 0}$ este descrescător, rezultă că $\frac{1}{2(n+1)} \leq I_n \leq \frac{1}{2(n-1)}$.

Răspuns corect: **B**

29 Din $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 0$, $\lim_{x \nearrow -1} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \searrow -1} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \nearrow 0} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \searrow 0} f(x) = +\infty$, rezultă că $y = 0$ este asimptotă orizontală la $\pm\infty$ și $x = -1$, $x = 0$ asimptote verticale.

Răspuns corect: **D**

30 Cum $f'(x) = -\frac{2x+1}{x^2(x+1)^2}$, $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 0\}$ avem că $x = -\frac{1}{2}$ este punct de maxim local pentru f . Din tabloul de variație al funcției f și din graficul lui f se deduce că intersecția dintre graficul lui f și dreapta orizontală $y = m$ are un singur punct de intersecție dacă și numai dacă $m = -4$.

Răspuns corect: B

Universitatea din Craiova
Facultatea de Automatică, Calculatoare și Electronică
Examen de admitere la licență - Sesiunea iulie 2023
Domeniul Calculatoare și Tehnologia Informației
Proba scrisă la matematică

Model 7

-
- 1** (3p) Fie $z = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$. Suma $|z| + |\bar{z}|$ este:
- ☐ A 2 ☐ B i ☐ C 0 ☐ D -i ☐ E 10
-
- 2** (3p) Soluția ecuației $\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{-8x} = 2$ este:
- ☐ A 0 ☐ B $\sqrt{3}$ ☐ C -8 ☐ D $\sqrt[3]{3}$ ☐ E 3
-
- 3** (3p) Dacă $B(2, 3)$ și $C(-1, 5)$, atunci distanța de la punctul $A(1, 1)$ la dreapta BC este:
- ☐ A 2 ☐ B 13 ☐ C 8 ☐ D $\frac{8}{13}$ ☐ E 5
-
- 4** (3p) Se consideră progresia aritmetică $(a_n)_{n \geq 1}$, unde $a_1 = 1$ și $a_5 = 13$. Atunci termenul a_{2009} este:
- ☐ A 1005 ☐ B 150 ☐ C 199 ☐ D 2009 ☐ E 6025
-
- 5** (3p) Fie funcțiile $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + 3x$ și $g(x) = -x - 4$. Câte puncte comune au graficele celor două funcții?
- ☐ A nici unul ☐ B 1 ☐ C 2 ☐ D 3 ☐ E 4
-
- 6** (3p) Lungimea razei cercului circumscris unui triunghi cu laturile 5, 6 și 7 este:
- ☐ A 5 ☐ B 6 ☐ C $6\sqrt{6}$ ☐ D 11 ☐ E 17
-
- 7** (3p) În mulțimea numerelor reale ecuația $25^{x+3} = 0,04$ are soluțiile:
- ☐ A -4 ☐ B 100 ☐ C 4 ☐ D 1 ☐ E 0
-
- 8** (3p) Într-o progresie aritmetică se cunosc $a_1 = 5$ și $a_{26} = 105$. Atunci a_{100} este:
- ☐ A 1000 ☐ B 250 ☐ C 401 ☐ D 510 ☐ E 1005
-
- 9** (3p) Dacă ecuația $(m-2)x^2 + (2m+1)x + m = 0$ are două rădăcini de semne contrare, atunci parametrul real m verifică:
- ☐ A $m = 1$ ☐ B $m = 5$ ☐ C $m \in (0, 2)$ ☐ D $m = 2$ ☐ E $m = 11$
-

- 10** (3p) Se consideră vectorii $\vec{u} = 2\vec{i} - \vec{j}$ și $\vec{v} = a\vec{i} + 2\vec{j}$. Determinați $a \in \mathbb{R}$ astfel încât măsura unghiului dintre cei doi vectori să fie de 30° .

☐ A 1 ☐ B 5 ☐ C 7 ☐ D 16 ☐ E $16 + 10\sqrt{3}$

- 11** (3p) Valoarea lui S , unde $S = 1 + 4 + 7 + 10 + \dots + 598$ este:

☐ A 59800 ☐ B 12000 ☐ C 59880 ☐ D 59900 ☐ E 10000

- 12** (3p) Fie $A(2, 1)$ și $B(6, 4)$. Determinați coordonatele punctului C, simetricul lui B față de A.

☐ A $(4, 5/2)$ ☐ B $(-2, 2)$ ☐ C $(-3, -3)$ ☐ D $(2, 2)$ ☐ E $(-2, 3/2)$

Se consideră polinomul $f \in \mathbb{R}[X]$, $f = 4X^3 - 12X^2 + aX + b$.

- 13** (3p) Să se determine $a, b \in \mathbb{R}$ astfel încât $f(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

☐ A $a \geq 12, b \geq 0$ ☐ B $a = 12, b \geq 0$ ☐ C $a \in \mathbb{R}, b \geq 0$
☐ D $a = 0, b \in \mathbb{R}$ ☐ E $a \leq 12, b \geq 0$

- 14** (3p) Să se determine $a, b \in \mathbb{R}$ astfel încât f să se dividă cu polinomul $x^2 - 1$.

☐ A $a \geq 4, b = 12$ ☐ B $a = 4, b = 12$ ☐ C $a = 0, b = 12$
☐ D $a = 4, b = -12$ ☐ E $a = -4, b = 12$

- 15** (3p) Să se determine $a, b \in \mathbb{R}$ astfel încât ecuația $f(x) = 0$ să aibă rădăcina $x = i$.

☐ A $a = b = 12$ ☐ B $a = 4, b = -12$ ☐ C $a = -0, b = 12$
☐ D $a = 4, b = 10$ ☐ E $a = -4, b = -12$

- 16** (3p) Să se determine $a, b \in \mathbb{R}$, astfel încât polinomul să aibă rădăcinile x_1, x_2, x_3 în progresie aritmetică și în plus $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 11$.

☐ A $a = -4, b = -12$ ☐ B $a = 0, b = -12$ ☐ C $a = 0, b = -12$
☐ D $a = -4, b = 12$ ☐ E $a = 12, b = 0$

Se consideră punctele $A(m, 1)$, $B(1-m, 2)$, $C(2m+1, 2m+1)$, unde $m \in \mathbb{R}$ și matricea

$$M = \begin{pmatrix} m & 1 & 1 \\ 1-m & 2 & 1 \\ 2m+1 & 2m+1 & 1 \end{pmatrix}.$$

- 17** (3p) Determinantul matricii M este:

☐ A $-4m^2$ ☐ B $-4m^2 + m - 1$ ☐ C 0 ☐ D $2m$ ☐ E $4m^3$

18 (3p) Dacă punctele A, B, C sunt coliniare, atunci m verifică:

- ☐ A $m \geq 0$ ☐ B $m \leq 0$ ☐ C $m = 0$ ☐ D $m = 2$ ☐ E $m \in \mathbb{R}$

19 (3p) Aria triunghiului ABC este mai mare sau egală cu:

- ☐ A 1 ☐ B $\frac{15}{32}$ ☐ C 10 ☐ D 100 ☐ E 15
-

Fie $a, b, c \in \mathbb{R}^*$ și matricea

$$A = \begin{pmatrix} a & a-b & a-b \\ 0 & b & b-c \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$$

20 (3p) Determinantul matricii A^n este:

- ☐ A abc ☐ B c ☐ C $\sqrt[n]{abc}$ ☐ D $a^n b^n c^n$ ☐ E $\sqrt{abc}$

21 (3p) Determinantul matricii A^{-1} este:

- ☐ A $\frac{1}{a} \frac{1}{b} \frac{1}{c}$ ☐ B $a^n b^n c^n$ ☐ C $\sqrt{abc}$ ☐ D 0 ☐ E $a^2 b^2 c^2$
-

Se consideră funcția $f(x) = \frac{x^2 - 2x + p}{x^2 - 6x + 8}$.

22 (3p) Domeniul maxim de definiție al funcției f este:

- ☐ A $(0, \infty)$ ☐ B $\mathbb{R}$ ☐ C $\mathbb{R} \setminus \{4\}$ ☐ D $\mathbb{R} \setminus \{2\}$ ☐ E $\mathbb{R} \setminus \{2, 4\}$

23 (3p) Să se determine p astfel încât graficul lui f să fie tangent la axa Ox .

- ☐ A $p = 0$ ☐ B $p = 13$ ☐ C $p = 1$ ☐ D $p \in \mathbb{R}$ ☐ E $p < 0$

24 (3p) Funcția f este strict crescătoare pe

- ☐ A $\mathbb{R}$ ☐ B $\mathbb{R} \setminus \{2, 4\}$ ☐ C $(1, \frac{5}{2})$ ☐ D $(0, \infty)$ ☐ E $(-\infty, -1)$
-

Pentru $n \in \mathbb{N}^*$ se consideră funcțiile $F_n : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ $F_n(x) = \int_0^x t^n e^{-t} dt, \quad x > 0$.

25 (3p) Să se calculeze $F_1(x)$, $x > 0$.

- ☐ A $(1+x)e^{-x}$ ☐ B xe^{-x} ☐ C $1 - xe^{-x}$ ☐ D $1 - (1+x)e^{-x}$ ☐ E $-xe^{-x}$

26 (3p) Să se determine punctele de inflexiune ale graficului funcției F_n .

- ☐ A n ☐ B e^n ☐ C 0 ☐ D n^n ☐ E e^{-n}

27 (3p) Să se calculeze $L = \lim_{x \rightarrow \infty} F_2(x)$.

- ☐ A $L = 0$ ☐ B $L = \infty$ ☐ C $L = 2$ ☐ D $L = -1$ ☐ E $L = e$
-

Se consideră funcțiile $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x^3}{3} - x + \arctg x$ și $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = \arctg x$.

28 (3p) Să se calculeze $\int_1^2 \frac{f'(x)}{x} dx$

- ☐ A 0 ☐ B 2 ☐ C $\ln 2$ ☐ D $\frac{1}{2} \ln 2$ ☐ E $\frac{3}{5} - \frac{1}{2} \ln 5 + \frac{1}{2} \ln 2$

29 (3p) Să se determine $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^3} \int_0^x f(t) dt$.

- ☐ A $\frac{1}{3}$ ☐ B ∞ ☐ C 0 ☐ D 1 ☐ E π

30 (3p) Să se calculeze aria suprafeței cuprinse între graficele celor două funcții și dreptele $x = 0$ și $x = 1$.

- ☐ A $\frac{5}{12}$ ☐ B e ☐ C 1 ☐ D $\ln 2$ ☐ E π
-

Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.

- 1 Răspuns corect: A
- 2 Răspuns corect: C
- 3 Răspuns corect: D
- 4 Răspuns corect: E
- 5 Răspuns corect: B
- 6 Răspuns corect: C
- 7 Răspuns corect: A
- 8 Răspuns corect: C
- 9 Răspuns corect: C
- 10 Răspuns corect: E
- 11 Răspuns corect: D
- 12 Răspuns corect: B
- 13 Răspuns corect: A
- 14 Răspuns corect: E
- 15 Răspuns corect: B
- 16 Răspuns corect: D
- 17 Răspuns corect: B
- 18 Răspuns corect: E
- 19 Răspuns corect: B
- 20 Răspuns corect: D
- 21 Răspuns corect: A

- 22** Răspuns corect: **E**
- 23** Răspuns corect: **C**
- 24** Răspuns corect: **B**
- 25** Răspuns corect: **D**
- 26** Răspuns corect: **A**
- 27** Răspuns corect: **C**
- 28** Răspuns corect: **E**
- 29** Răspuns corect: **B**
- 30** Răspuns corect: **A**

Universitatea din Craiova
Facultatea de Automatică, Calculatoare și Electronică
Examen de admitere la licență - Sesiunea iulie 2023
Domeniul Calculatoare și Tehnologia Informației
Proba scrisă la matematică

Model 8

1 (3p) Fie $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$. Numărul submultimilor cu 4 elemente ale mulțimii A care conțin elementul 0 este:

- ☐ A C_6^4 ; ☐ B A_6^4 ; ☐ C A_5^3 ; ☐ D C_6^3 ; ☐ E C_5^3 .

2 (3p) Probabilitatea ca un număr natural de două cifre să fie multilu de 10 este:

- ☐ A 0.1; ☐ B 1; ☐ C 0.01; ☐ D 0.9; ☐ E 9.

3 (3p) Numărul complex $(1 - i)^{16}$ este egal cu:

- ☐ A 256; ☐ B 128; ☐ C -128; ☐ D -128i; ☐ E 512i.

4 (3p) Vectorii $\vec{u} = (m - 1)\vec{i} + 2\vec{j}$, $\vec{v} = (m + 1)\vec{i} - 2\vec{j}$, $m < 0$, sunt perpendiculari. Atunci m este:

- ☐ A $-\sqrt{2}$; ☐ B $\pm\sqrt{5}$; ☐ C $-\sqrt{5}$; ☐ D -1; ☐ E ± 1 .

5 (3p) Valoarea maximă a funcției $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = -3x^2 + 5x - 1$ este:

- ☐ A $-\frac{12}{13}$; ☐ B $-\frac{13}{12}$; ☐ C $\frac{13}{12}$; ☐ D $\frac{12}{13}$; ☐ E $\frac{5}{6}$.

6 (3p) Dacă $\sin \alpha = \frac{1}{5}$, atunci $\cos(2\alpha)$ este:

- ☐ A $\frac{2}{5}$; ☐ B $\frac{2}{25}$; ☐ C $\frac{20}{25}$; ☐ D $\frac{1}{25}$; ☐ E $\frac{23}{25}$.

Se da următoarea sumă de termeni aflați în progresie aritmetică:

$$S_n = 7 + 3 - 1 - 5 - 9 - \dots - x = -221.$$

7 (3p) Rația acestei progresii aritmetice este:

- ☐ A 7; ☐ B 4; ☐ C 2; ☐ D -4; ☐ E -2.

8 (3p) Ultimul termen x al sumei S_n este:

- ☐ A -49; ☐ B -45; ☐ C -37; ☐ D -35; ☐ E -41.

9 (3p) Numărul de termeni n al sumei S_n este:

- ☐ A 12; ☐ B 13; ☐ C 14; ☐ D 11; ☐ E 10.
-

10 (3p) Dacă $AB = 6$ și $A(3, m)$, $B(-m, 3)$, atunci m se află în mulțimea:

- ☐ A $\{\pm 6\}$; ☐ B $\{\pm 9\}$; ☐ C $\{9\}$; ☐ D $\{6\}$; ☐ E $\{\pm 3\}$.
-

11 (3p) Dacă $A(3, 2)$, $B(-3, 3)$, $C(-1, -3)$, atunci dreapta suport a medianei duse din B are ecuația:

- ☐ A $7x + 8y - 3 = 0$; ☐ B $2x - 5y + 3 = 0$; ☐ C $-5x - 9y + 7 = 0$;
☐ D $3x - 3y + 10 = 0$; ☐ E $-3x + 3y + 10 = 0$.
-

12 (3p) Mulțimea soluțiilor reale ale ecuației $\log_2(x+1)^2 + \log_4(x-2) = 1$ este:

- ☐ A $\{3\}$; ☐ B $\{-2\}$; ☐ C $\{3; -2\}$; ☐ D $\{-3\}$; ☐ E $\{2\}$.
-

13 (3p) Limita $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sin(x-5)}{x^2-25}$ este:

- ☐ A 1; ☐ B 0; ☐ C 0.1; ☐ D 10; ☐ E niciuna dintre variantele anterioare.
-

14 (3p) Limita $\lim_{x \rightarrow 0} \sin\left(\frac{1}{x}\right) \operatorname{arctg} x$ este:

- ☐ A 0; ☐ B 1; ☐ C 10; ☐ D 0.1; ☐ E ∞ .
-

Fie matricele $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & m & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ și $B = \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix}$.

15 (3p) Rangul matricei A este 3 atunci când m ia valoarea:

- ☐ A 3; ☐ B -3; ☐ C 2; ☐ D 1; ☐ E 0.

16 (3p) Pentru $m = 1$ soluția sistemului $AX = B$ este:

- ☐ A $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$; ☐ B $X = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$; ☐ C $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$;
☐ D $X = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$; ☐ E $X = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$;
-

Fie $a \in \mathbb{R}$ și $x^3 - x - a = 0$ cu rădăcinile complexe x_1, x_2, x_3 .

17 (3p) Produsul $(x_1 + a)(x_2 + a)(x_3 + a)$ este egal cu:

- ☐ A 0; ☐ B a^3 ; ☐ C $3a$; ☐ D $-3a$; ☐ E $-a^3$.

18 (3p) Suma $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 =$ este:

- ☐ A 0; ☐ B a^3 ; ☐ C $3a$; ☐ D $-3a$; ☐ E $-a^3$.

19 (3p) Dacă x_1, x_2, x_3 sunt numere întregi distincte două câte două, atunci $x_1, x_2, x_3 \in$

- ☐ A $\{a; a+1; a-1\}$; ☐ B $\{1; -2; 3\}$; ☐ C $\{a; a+4; a-1\}$;
☐ D $\{-1; 2; 5\}$; ☐ E $\{a-2; a; a+2\}$.
-

Fie $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 3x - 2 \cos x + 4$.

20 (3p) Funcția f

- ☐ A nu este monotonă; ☐ B este strict crescătoare; ☐ C este descrescătoare;
☐ D este pară; ☐ E este impară.

21 (3p) Derivata a doua $f''(x)$ este:

- ☐ A $2 \cos x$; ☐ B $-2 \cos x$; ☐ C $2 \sin x$; ☐ D $-2 \sin x$; ☐ E $3 + 2 \cos x$.

22 (3p) O primitivă a lui f este:

- ☐ A $F(x) = \frac{3}{2}x^2 - 2 \sin x + 4$; ☐ B $F(x) = \frac{3}{2}x^2 + 2 \sin x + 4$;
☐ C $F(x) = \frac{3}{2}x^2 - 2 \sin x + 4x + 5$; ☐ D $F(x) = 3x^2 + 2 \cos x$;
☐ E $F(x) = 3x^2 + 2 \sin x$.
-

Fie $f : (2, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x}{(x-2)(x^2+1)}$ și $F(x) = a \ln(x-2) + b \ln(x^2+1) + c \operatorname{arctg} x$.

23 (3p) F este o primitivă a lui f pentru

- ☐ A $a = \frac{1}{5}, b = \frac{1}{5}, c = \frac{1}{5}$; ☐ B $a = \frac{2}{5}, b = \frac{1}{5}, c = \frac{2}{5}$; ☐ C $a = \frac{2}{5}, b = \frac{-1}{5}, c = \frac{2}{5}$;
☐ D $a = \frac{2}{5}, b = \frac{-1}{5}, c = \frac{1}{5}$; ☐ E $a = \frac{2}{5}, b = \frac{-2}{5}, c = \frac{2}{5}$.

24 (3p) Orice primitivă a lui f este:

- ☐ A pozitivă pe $(2, \infty)$; ☐ B descrescătoare pe $(2, \infty)$; ☐ C funcție pară pe $(2, \infty)$;
☐ D funcție impară pe $(2, \infty)$; ☐ E crescătoare pe $(2, \infty)$.

25 (3p) Integrala $\int_3^4 f(x) dx$ este:

- ☐ A $\frac{2}{5} \ln\left(\frac{40}{17}\right) - \frac{2}{5} \operatorname{arctg}\left(\frac{4}{3}\right)$; ☐ B $\frac{1}{5} \ln\left(\frac{40}{17}\right) + \frac{1}{5} \operatorname{arctg} 4 - \frac{1}{5} \operatorname{arctg} 3$;
☐ C $\frac{1}{5} \ln\left(\frac{40}{17}\right) - \frac{1}{5} \operatorname{arctg} 4 + \frac{1}{5} \operatorname{arctg} 3$; ☐ D $\frac{2}{5} \ln\left(\frac{20}{17}\right) + \frac{1}{5} \operatorname{arctg} 4 - \frac{1}{5} \operatorname{arctg} 3$;
☐ E $\frac{2}{5} \ln\left(\frac{20}{17}\right) - \frac{1}{5} \operatorname{arctg} 4 + \frac{1}{5} \operatorname{arctg} 3$.
-

Pentru fiecare $n \in \mathbb{N}^*$ se consideră funcția $f_n : [-1, 0] \rightarrow \mathbb{R}$, $f_n(x) = (x+1)^n$.

26 (3p) Integrala $\int_{-1}^0 f_1(x) dx$ este:

- ☐ A $\frac{1}{2}$; ☐ B 1; ☐ C $-\frac{1}{2}$; ☐ D 0; ☐ E $\frac{3}{2}$.

27 (3p) Integrala $\int_{-1}^0 x f_n(x) dx$ este:

- ☐ A $\frac{1}{n+1}$; ☐ B $\frac{1}{(n+1)(n+2)}$; ☐ C $\frac{-1}{(n+1)(n+2)}$; ☐ D $\frac{1}{n+2}$; ☐ E $\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2}$.
-

28 (3p) Integrala $\int_1^e \ln^2 x dx$ este:

- ☐ A e ; ☐ B 2; ☐ C $e + 2$; ☐ D $e - 2$; ☐ E $2e$.
-

29 (3p) Integrala $\int_{-3}^3 \sin^9 x dx$ este:

- ☐ A 9; ☐ B 0; ☐ C 1; ☐ D $\cos 9$; ☐ E $-\cos 9$.
-

30 (3p) Integrala $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin^3 x dx$ este:

- ☐ A 1; ☐ B 0; ☐ C $\frac{1}{20}$; ☐ D $\frac{5}{24}$; ☐ E $\frac{7}{12}$.
-

Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.

- 1 Răspuns corect: E
- 2 Răspuns corect: A
- 3 Răspuns corect: A
- 4 Răspuns corect: C
- 5 Răspuns corect: C
- 6 Răspuns corect: E
- 7 Răspuns corect: D
- 8 Răspuns corect: E
- 9 Răspuns corect: B
- 10 Răspuns corect: E
- 11 Răspuns corect: A
- 12 Răspuns corect: A
- 13 Răspuns corect: C
- 14 Răspuns corect: A
- 15 Răspuns corect: E
- 16 Răspuns corect: C
- 17 Răspuns corect: B
- 18 Răspuns corect: C
- 19 Răspuns corect: A
- 20 Răspuns corect: B
- 21 Răspuns corect: A

22 Răspuns corect: ☐ C

23 Răspuns corect: ☐ D

24 Răspuns corect: ☐ E

25 Răspuns corect: ☐ B

26 Răspuns corect: ☐ A

27 Răspuns corect: ☐ C

28 Răspuns corect: ☐ D

29 Răspuns corect: ☐ B

30 Răspuns corect: ☐ D