LA COMMANDE OPTIMALE APRÈS LE CRITÈRE DE LA PERTE D'ÉNERGIE, DE L'ACCÉLERATION DES ENTRAÎNEMENTS ÉLECTRIQUES AVEC UN COUPLE STATIQUE AVEC DE COMPONENTE CONSTANTE ET PROPORTIONELLE AVEC LA VITESSE ET L'INSTANT FINAL NON FIXÈ

Niculae **BOTEANU**
Facultè d'Electromecanique, Universitè du Craiova, Roumanie
nboteanu@em.ucv.ro

Profir **DEGERATU**
Facultè d'Electromecanique, Universitè du Craiova, Roumanie
pdegeratu@em.ucv.ro

Marius **POPESCU**
Facultè d'Electromecanique, Universitè du Craiova, Roumanie
mrpopescu@em.ucv.ro

Resumé: Dans ce travail, en considérant une entraînement avec un couple statique comprennent une component constante et l'une proportionnelle avec la vitesse, à l'aide du calcule varitionnel classique, on détermine la trajectoire extrémale et l'instant final optim qui assure la valeur minime de la perte d'énergie causée par le courante de charge dans les processus d'accélération et, respectivement, de dècelleration.

Mots clés: théorie systèmes, entraînements électriques, modelassions et simulation optimisation, calcule varitionnel,

1. INTRODUCTION

Dans le cas des entraînements électriques qui fonctionnent dans le service de type continuu (S1), s'impose la nécessité de la réalisation des processus de démarrage et de freinage, et aussi dans le cas de ceux qui fonctionnent dans le service de type ininterrompu avec de la modification périodique de vitesse (S8), apparaît la nécessité de la réalisation des variations de vitesse. Pour évaluer de ces processus d'accélération, respectivement de déccéleration-spécialement pour les entraînements de grande puissance – on peut adopter pourl' indice de performance la minimisation des pertes d'énergie, mais la résolution de ce problème d'optimisation peut-être effectuée en utilisant le calcule varitionnel.

2. LE MODELE MATHEMATIQUE

On considère un entraînement électrique à couple statique avec une componente constante et une componente proportionnelle avec la vitesse:

$$M_S = M_0 + k_1\omega, \quad \text{ou} \quad F_S = F_0 + k_1\omega \ , \tag{1}$$

à laquelle, en négligeant l'inertie électromagnétique par rapport à l'inertie mécanique, en l'ipothèse d'un moment d'inertie constant, celle ci sera décrite par l'équation générale du mouvement et de dépendance entre la vitesse et l'accélération [3].

$$\begin{gathered} M = M_S + J\frac{d\omega}{dt} \quad \text{ou} \quad F = F_S + m\frac{dv}{dt}, \\ \omega = \int \dot{\omega}\,dt \qquad \text{ou} \qquad v = \int \dot{v}\,dt \end{gathered} \tag{2}$$

Pour généraliser les interprétations et les conclusions, pour la restreinte des intervaux des valeurs aussi, on introduit les coordonnates relatives. Dans ce sens, en considérant comme référence pour le temps la constante mécanique de temps et pour le courant, le couple, la force et la vitesse, leurs valeurs nominales, on obtient les coordonnâtes relatives [2], [3]

$$\begin{gathered} \tau = \frac{t}{T}, \quad \left(T = \frac{J\omega_N}{M_N} = \frac{mv_N}{F_N} \right), \quad i = \frac{i}{I_N}, \\ \mu = \frac{M}{M_N} = \frac{F}{F_N}, k_1 = \frac{k_1\omega_N}{M_N} = \frac{k_1 v_N}{F_N}, v = \frac{\omega}{\omega_N} = \frac{v}{v_N} \end{gathered} , \tag{3}$$

Dans l'ipothese de la proportionnalité entre le couple électromagnétique et le courant de charge, les équations (1), (2) et (3), en coordonnates rélatives, devinent:

$$\mu_s = \mu_0 + k_1 v, \tag{4}$$

$$i = \mu = \mu_s + \dot{v} = \mu_0 + k_1 v + \dot{v}, \tag{5}$$

$$v = \int \dot{v}\,d\tau \tag{6}$$

avec les conditions initiales et finales

$$\tau = \tau_1, \quad v(\tau_1) = v_1, \quad \tau = \tau_2, \quad v(\tau_2) = v_2, \tag{7}$$

L'ensemble des commandes admissibles et l'ensemble des trajectoires admissibles sont considérés des ensembles bornées et ouverts.

3. LE CRITERE D'OPTIMISATION

En adoptant comme critère d'optimisation la perte d'énergie causée par le courant de charge par l'effet Joule pendant la durée du processus d'accelleration et en tenant compte de l'équation de mouvement (5), le critère d'optimisation aura l'expression [2], [3]

$$J\left[v(\tau)\right]=\int_{\tau_1}^{\tau_2} i^2\,d\tau=\int_{\tau_1}^{\tau_2}\left(\mu_s+\dot{v}\right)^2 d\tau=min\,. \tag{8}$$

4. FORMULATION DU PROBLEME D'OPTIMISATION

Le problème d'optimisation réside dans la détermination de la commande optime admise $i^*(\tau)$ ou $\mu^*(\tau)$, qui puisse transférer le système de la conditions initiales $(\tau_1, v(\tau_1))$ à conditions finales $(\tau_2, v(\tau_2))$ sur la trajectoire extrémale admise $v^*(\tau)$, en assurant la minimisation du critère d'efficacité (8) [2]

$$J\left[v(\tau)\right]=\int_{\tau_1}^{\tau_2}\left(\mu_s+\dot{v}\right)^2 d\tau=min\,, \tag{9}$$

pour une valeur fixée de la variation de vitesse exprimée par l'intégrale

$$\Delta v=v_2-v_1=\int_{\tau_1}^{\tau_2}\dot{v}(\tau)\,d\tau, \tag{10}$$

réalisée dans un intervalle de temps donné

$$\tau_2-\tau_1=\int_{\tau_1}^{\tau_2} 1\,d\tau\,, \tag{11}$$

en satisfaisant les conditions terminales (7) et les possibles contraintes pour le courant, le couple électromagnétiques, la vitesse et l'accélération.

Ainsi, on résulte une problème d'optimisation linéaire-quadratique, d'extrême isopérimétrique. Pour le résoudre le primiere problème se transforme dans une dual problème d'extrême inconditionné, en construisant à l'aide du multiplicateur constant Lagrange λ_0 la fonction Lagrange [4]

$$L=\left(\mu_S+\dot{v}\right)^2+\lambda_0\dot{v}=\left(\mu_0+k_1 v+\dot{v}\right)^2+\lambda_0\dot{v} \tag{12}$$

et déterminant l'extrême inconditionné [1] et [4], sur les mêmes extrémales que celles-ci du problème primale [1], ayant la fonctionnelle

$$J\left[v(\tau)\right]=\int_{\tau_1}^{\tau_2} L(\tau)\,d\tau=min\,. \tag{13}$$

5. LA CONDITION NECESSAIRE D'EXTRÊME

La condition nécessaire d'extrême faible est exprimée par l'équation Euler-Lagrange [4]

$$\frac{\partial L}{\partial v}-\frac{d}{d\tau}\frac{\partial L}{\partial \dot{v}}=0, \tag{14}$$

dans laquelle ayant

$$\begin{aligned}
\frac{\partial L}{\partial v}&=2\,k_1\left(\mu_0+k_1 v+\dot{v}\right),\\
\frac{\partial L}{\partial \dot{v}}&=2\left(\mu_0+k_1 v+\dot{v}\right)+\lambda_0,\\
\frac{d}{d\tau}\frac{\partial L}{\partial \dot{v}}&=2\left(k_1\dot{v}+\ \ddot{v}\right),
\end{aligned} \tag{15}$$

on conduit à la équation différentielle de seconde ordre

$$\ddot{v}-k_1^2\,v=k_1\mu_0\,. \tag{16}$$

6. LA SOLUTION OPTIME

En considérant la résolution d'équation caractéristique atachée à l'équation différentielle homogène

$$r^2-k_1^2=0\quad\Rightarrow\quad r_{1,2}=\pm\,k_1, \tag{17}$$

on obtient la solution générale v_g de l'équation différentielle homogène qui, à coté de la solution particulaire v_p de l'équation différentielle neomogène, conduisent a solution général de l'équation neomogène en représentant la famille de trajectoires

$$v=v_p+v_g=-\frac{\mu_0}{k_1}+C_1\,ch\left(k_1\tau\right)+C_2 sh\left(k_1\tau\right) \tag{18}$$

En considérant l'extrémité initiale de la trajectoire $(\tau_1, v(\tau_1))$ fixée, on peut déterminer l'une des constantes arbitraires [3], [4]

$$\tau_1=0\,,v(0)=-\frac{\mu_0}{k_1}+C_1\ =v_1\,,C_1\ =\frac{\mu_0}{k_1}+v_1\,, \tag{19}$$

qui remplacée dans la solution (18) on obtient le fascicule des trajectoires

$$v\left(\tau,C_2\right)=-\frac{\mu_0}{k_1}+\left(\frac{\mu_0}{k_1}+v_1\right)ch\left(k_1\tau\right)+C_2\,sh\left(k_1\tau\right) \tag{20}$$

L'instant final étant non fixé, l'extermité finale de la trajectoire $\left(\tau_2, v\left(\tau_2\right)\right)$ est mobile sur la transversale $v_2=\varphi\left(\tau_2\right)=const.$ et $\dot{\varphi}\left(\tau_2\right)=0,$ mais la condition nécessaire d'existence de l'extrême impose la satisfaction de la condition de transversalité [4]

$$\left[L+\left(\dot{\varphi}-\dot{v}\right)\frac{\partial L}{\partial \dot{v}}\right]_{\tau=\tau_2}=0\,, \tag{21}$$

où ayant (12) et (15), conduit à l'équation

$$\left|\left(\mu_0+k_1 v\right)^2-\dot{v}^2\right|_{\tau=\tau_2}=0, \tag{22}$$

ou tentant compte des expressions de la vitesse (20) et de l'accélération correspondante on obtient

$$\begin{aligned}&\left[\left(\mu_0+k_1 v_1\right) ch k_1\tau_2+k_1 C_2\, sh\, k_1\tau_2\right]^2-\\&-\left[\left(\mu_0+k_1 v_1\right) sh\, k_1\tau_2+k_1 C_2\, ch\, k_1\tau_2\right]^2=\\&=\left(\mu_0+k_1 v_1\right)^2-k_1^2 C_2^2=0,\end{aligned}$$

d'où on détermine la seconde constante arbitraire

$$C_2=\pm\left(\frac{\mu_0}{k_1}+v_1\right), \tag{23}$$

où le signe + corresponde pour l'accélération, et le signe – corresponde pour la deccéleration.
Par la condition de contact entre la trajectoire extrémale et transversale [4]

$$\begin{aligned}v_2=v\left(\tau_2\right)&=-\frac{\mu_0}{k_1}+\left(\frac{\mu_0}{k_1}+v_1\right)\cdot\\&\cdot\left(ch\, k_1\tau_2\pm sh\, k_1\tau_2\right)=\\&=-\frac{\mu_0}{k_1}+\left(\frac{\mu_0}{k_1}+v_1\right)e^{\pm k_1\tau_2},\end{aligned} \tag{24}$$

on détermine par logaritmation le temps final optime pour accélération, aussi pour deccéleration

$$\begin{aligned}\tau_2^*&=\frac{1}{k_1}ln\,\frac{\mu_0+k_1 v_2}{\mu_0+k_1 v_1}=\frac{1}{k_1}ln\,\frac{\mu_S\left(\tau_2\right)}{\mu_S\left(\tau_1\right)},\\\tau_2^*&=\frac{1}{k_1}ln\,\frac{\mu_0+k_1 v_1}{\mu_0+k_1 v_2}=\frac{1}{k_1}ln\,\frac{\mu_S\left(\tau_1\right)}{\mu_S\left(\tau_2\right)}.\end{aligned} \tag{25}$$

En remplaçant les deux constants (19) et (23) dans la solution (18) de l'équation différentielle, on va obtenir l'évolution (fig.1 et fig.2) de la trajectoire extrémale pour vitesse

$$\begin{aligned}v^*\left(\tau\right)&=-\frac{\mu_0}{k_1}+\left(\frac{\mu_0}{k_1}+v_1\right)\left(ch\, k_1\tau\pm sh\, k_1\tau\right)=\\&-\frac{\mu_0}{k_1}+\left(\frac{\mu_0}{k_1}+v_1\right)e^{\pm k_1\tau},\quad\forall\tau\in\left[0,\tau_2^*\right]\end{aligned} \tag{26}$$

pour l'accélération et la deccélleration, aussi bien que le couple dynamique

$$\begin{aligned}\dot{v}^*\left(\tau\right)=\mu_d^*\left(\tau\right)&=\left(\mu_0+k_1 v_1\right)\left(sh\, k_1\tau\pm ch\, k_1\tau\right)=\\&=\pm\left(\mu_0+k_1 v_1\right)e^{\pm k_1\tau},\quad\forall\tau\in\left[0,\tau_2^*\right],\end{aligned} \tag{27}$$

et pour le choc

$$\begin{aligned}\ddot{v}^*\left(\tau\right)&=k_1\left(\mu_0+k_1 v_1\right)\left(ch\, k_1\tau\pm sh\, k_1\tau\right)=\\&=k_1\left(\mu_0+k_1 v_1\right)e^{\pm k_1\tau},\quad\forall\tau\in\left[0,\tau_2^*\right].\end{aligned} \tag{28}$$

En tenant compte de l'extremale de la vitesse (26), le couple statique (fig. 1 et fig. 2) aura l'expression

$$\mu_S=\mu_0+k_1 v=\left(\mu_0+k_1 v_1\right)e^{\pm k_1\tau},\forall\tau\in\left[0,\tau_2^*\right] \tag{27}$$

et en considérant l'équation du mouvement (5) et des expressions de la vitesse (26) et d'accélération (27) on détermine la commande extrémâle pour accélération (fig.1) et deccélleration (fig. 2)

$$\begin{aligned}&i^*\left(\tau\right)=\mu^*\left(\tau\right)=\mu_S+\dot{v}=2\left(\mu_0+k_1 v_1\right)e^{k_1\tau},\\&\text{et}\quad i^*\left(\tau\right)=\mu^*\left(\tau\right)=0,\quad\forall\tau\in\left[0,\tau_2^*\right]\end{aligned} \tag{28}$$

La valeur minime du critère d'optimisation (8), en tenant compte de l'instant final optim pendant l'accélleration devient

$$\begin{aligned}J_{min}^*&=\int_{\tau_1}^{\tau_2}i^2\left(\tau\right)d\tau=\int_{\tau_1}^{\tau_2}\left[2\left(\mu_0+k_1 v_1\right)e^{k_1\tau}\right]^2 d\tau=\\&=4\mu_0\left(v_2-v_1\right)+2k_1\left(v_2^2-v_1^2\right),\end{aligned} \tag{31}$$

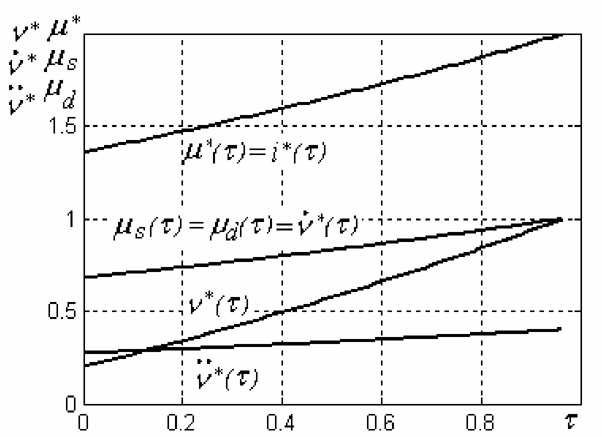

Fig.1. Trajectorie et commande extrémales pour l' accelleration (μ_0=0.6, k_1=0.4, v_1=0.2 et v_2=1)

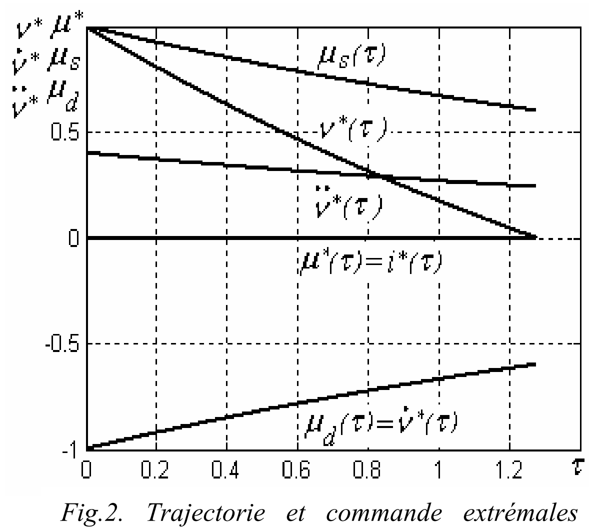

Fig.2. Trajectorie et commande extrémales pour le freinage (μ_0=0.6, k_1=0.4, v_1=0.2 et v_2=1)

4. CONCLUSIONS

Les résultats exprimés par la trajectoire extrémale et la commande extrémale obtenue peuvent être utilisées aussi dans les projections que dans la commande optimale des systèmes d'entraînement électrique à couple statique avec component constante et component proportionnelle à vitesse, qui fonctionnent dans le service continu (S1) ou dans le service ininterrompu à modification périodique de la vitesse (S8).

Le problème où le couple statique est seulement proportionnel à la vitesse, l'optimisation avec l'instant final non fixé n'admet pas une solution dans la période de démarrage ou de freinage jusqu'au repos.

Ces résultats, par l'économie d'énergie realisée dans les procéssus de démarage, de freinage, et de modification périodique de la vitesse, conduisent au augmentation de la qualité et de l'efficacité de ces systèmes d'entraînement électrique.

5. Bibliographie

1. Belea C., (1985); *Teoria sistemelor*; Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti.

2. Boteanu N., Degeratu P., (2000); *Optimizarea după criteriu pierderilor de energie a acționării ce trebuie să realizeze o variație de viteză în cazul cuplului static cu componentă constantă şi componentă proporțională cu viteza*; Lucrările Ştiințifice ale Simpozionului Internațional Universitareia ROPET 2000-Inginerie electrică, Editura Focus, Petroşani.

3. Degeratu P., Boteanu N., Constantinescu C., (2001); *Optimal Control by Energetical Criterion of Electric Drive Systems with Constant Static Torque and Arbitrary Terminal Moment*; Lucrările ştiințifice ale Simpozionului Internațional Universitaria ROPET 2001-Inginerie electrică, Editura Focus, Petroşani.

4. Lavrentiev M.A., Liusternik L.A.; *Curs de calcul variațional*, Editura Tehnică, Bucureşti.