Universitatea din Craiova
Facultatea de Automatică, Calculatoare și Electronică
Examen de admitere la licență - Sesiunea iulie 2016
Proba scrisă la matematică

Model 1

SUBIECTUL I (30 de puncte)

5p **1.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația: $(2x+5)^2 = 16$

5p **2.** Determinați numărul real m pentru care vârful parabolei asociate funcției $f: \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$, $f(x) = 2x^2 - 5mx + 3$ are abscisa egală cu $\frac{1}{4}$.

5p **3.** Să se determine soluția reală a ecuației: $\log_3(5x+6) = 2$

5p **4.** Calculați : $\frac{P_5}{C_6^2 + A_5^3}$

5p **5.** Se consideră vectorii : $\overrightarrow{v_1} = \vec{\imath} + 2\vec{\jmath}$ și $\overrightarrow{v_2} = 3\vec{\imath} - \vec{\jmath}$. Determinați coordonatele vectorului $\vec{w} = \overrightarrow{v_1} + 3\overrightarrow{v_2}$.

5p **6.** Calculați perimetrul triunghiului ABC, știind că : *AB=3, AC=5* și $\widehat{BAC} = 60°$.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Pentru fiecare $a \in \boldsymbol{R}$ se consideră matricea $\begin{pmatrix} -1 & 2 & a \\ 2 & -1 & a \\ a & a & 2 \end{pmatrix}$ și sistemul $\begin{cases} -x+2y+az=1 \\ 2x-y+az=1 \\ ax+ay+2z=1 \end{cases}$.

5p a) Să se calculeze determinantul matricei *A(a)*, $a \in \boldsymbol{R}$.

5p b) Să se determine $a \in \boldsymbol{R}$ pentru care sistemul dat poate fi rezolvat prin metoda Cramer.

5p c) Pentru *a=0,* să se rezolve sistemul.

2. Pe mulțimea numerelor reale se consideră legea de compoziție: $x * y = xy - 5x - 5y + 30$, pentru orice $x, y \in \boldsymbol{R}$.

5p a) Să se arate că : $x * y = (x-5)(y-5) + 5$, pentru orice $x, y \in \boldsymbol{R}$.

5p b) Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația: $3^x * 3^x = 21$.

5p c) Să se determine elementele simetrizabile în raport cu legea "*".

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f: \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$, $f(x) = \begin{cases} ax-3, & x<3 \\ 2\sqrt{x}, & x \geq 3 \end{cases}$

5p a) Să se determine valoarea reală a lui a, astfel încât funcția f să fie continuă în punctul $x_0=3$.

5p b) Să se calculeze $f'(9)$.

5p c) Să se scrie ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul *A(9,6).*

2. Se consideră funcțiile $f_m: \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$, $f_m(x) = m^2x^2 + mx + 2, m \in \boldsymbol{R}^*$

5p a) Să se demonstreze că primitivele funcțiilor f_m sunt funcții crescătoare, pentru orice $m \in \boldsymbol{R}^*$.

5p b) Să se calculeze: $\int_0^1 (f_1(x) - x^2 - 2)e^x dx$

5p c) Să se determine $m \in \boldsymbol{R}^*$ pentru care aria suprafeței plane determinate de graficul funcției f_m, axa *Ox* și dreptele *x=0, x=1* are valoare minimă.

Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.

Universitatea din Craiova
Facultatea de Automatică, Calculatoare și Electronică
Examen de admitere la licență - Sesiunea iulie 2016
Proba scrisă la matematică

Model 2

SUBIECTUL I (30 de puncte)

5p **1.** Să se afle partea reală a numărului complex $z = (2 - 3\sqrt{2}i)^2$.

5p **2.** Determinați numărul real m astfel încât soluțiile ecuației $x^2 - mx + (m+1) = 0$ să verifice relația ${x_1}^2 + {x_2}^2 = x_1 x_2 - 2$.

5p **3.** Să se determine soluția reală a ecuației: $2^{2x} - 9 \cdot 2^x + 8 = 0$.

5p **4.** Să se afle termenul dezvoltării binomului $(\sqrt{a} + \frac{2}{\sqrt[3]{a}})^{80}, a > 0$ care nu conține pe a.

5p **5.** În sistemul de coordonate *xOy* se consideră punctele *A(2,3)* și *B(-1,0)*. Scrieți ecuația dreptei *AB*.

5p **6.** Știind că $\sin x = \frac{1}{3}$ și $x \in (0, \frac{\pi}{2})$, calculați $\sin 2x$.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Se consideră matricea $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$.

5p a) Verificați că : $A^2 - 8A = 3I_2$, unde I_2 este matricea unitate.

5p b) Arătați că matricea $\frac{1}{3}(A - 8I_2)$ este inversa matricei *A*.

5p c) Demonstrați că ecuația *AX=XA* are o infinitate de soluții.

2. Se consideră polinomul : $f = x^3 - 9x^2 + ax - 24 \in \boldsymbol{R}[X]$, cu rădăcinile $x_1, x_2, x_3 \in \boldsymbol{R}$.

5p a) Demonstrați că expresia $\frac{1}{x_1x_2} + \frac{1}{x_2x_3} + \frac{1}{x_1x_3}$ nu depinde de a.

5p b) Determinați $a \in \boldsymbol{R}$ știind că restul împărțirii polinomului f la *X-1* este egal cu *-6*.

5p c) Aflați $a \in \boldsymbol{R}$ și rădăcinile polinomului f știind că $x_1+x_3=2x_2$.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f: (0, \infty) \to \boldsymbol{R}, f(x) = \frac{2x-1}{\sqrt{x}}$, oricare ar fi *x>0*.

5p a) Verificați că: $f'(x) = \frac{2x+1}{2x\sqrt{x}}$, oricare ar fi *x>0*.

5p b) Arătați că $25\sqrt{14} < 27\sqrt{13}$.

5p c) Calculați $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x^{13}) + x^{15} + f(\frac{1}{4x^{13}})}{x^{15}}$.

2. Se consideră funcția $f: (0, \infty) \to \boldsymbol{R}$, definită prin $f(x) = \ln x$.

5p a) Să se demonstreze că orice primitivă a funcției f este convexă pe $(0, \infty)$.

5p b) Calculați $\int_e^{e^2} f(x^2 \cdot e^x) dx$.

5p c) Determinați volumul corpului de rotație al funcției $g: [1, e] \to \boldsymbol{R}, g(x) = f(x) \cdot x$.

Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.

Universitatea din Craiova
Facultatea de Automatică, Calculatoare şi Electronică
Examen de admitere la licenţă - Sesiunea iulie 2016
Proba scrisă la matematică

Model 3

SUBIECTUL I (30 de puncte)

5p **1.** Calculaţi partea întreagă a numărului $A = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + ... + \frac{1}{2015\cdot 2016}$.

5p **2.** Rezolvaţi în $\mathbb{Z}$ inecuaţia $x^2 - 2x - 3 \leq 0$.

5p **3.** Aflaţi numărul termenilor raţionali din dezvoltarea $\left(1+\sqrt[4]{2}\right)^{40}$.

5p **4.** Calculaţi cosinusul unghiului A al ΔABC, în care $AB = 10$, $AC = 8$ şi $BC = 12$.

5p **5.** Se consideră punctele $A(-2,3)$, $B(1,5)$ şi $C(6,3)$. Determinaţi coordonatele punctului D, astfel încât patrulaterul $ABCD$ să fie paralelogram.

5p **6.** Să se determine $\sin 2a$, ştiind că $\sin a = \frac{1}{3}$ şi $a \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Pentru fiecare $x \in \mathbb{R}$, se consideră matricea $A(x) = \begin{pmatrix} 1 & x & x \\ 0 & 1 & x \\ x-1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

5p **a)** Calculaţi $\det A(1)$.

5p **b)** Dacă $B(1) = A(1) - I_3$, calculaţi $B(1)^3$.

5p **c)** Calculaţi $A(1)^{2016}$.

2. Pe $\mathbb{R}$ se defineşte legea $x \circ y = xy - (x+y)\sqrt{2} + 2 + \sqrt{2}$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$.

5p **a)** Verificaţi dacă $x \circ y = \left(x-\sqrt{2}\right)\left(y-\sqrt{2}\right)+\sqrt{2}$.

5p **b)** Arătaţi că mulţimea $\left(\sqrt{2}, \infty\right)$ este parte stabilă a lui $\mathbb{R}$, în raport cu legea „$\circ$”.

5p **c)** Calculaţi $a = \left(-\sqrt{2016}\right) \circ \left(-\sqrt{2015}\right) \circ ... \circ \sqrt{2015} \circ \sqrt{2016}$.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \ln \frac{x^2+5}{x^2+1}$.

5p **a)** Calculaţi $f'(x)$, $x \in \mathbb{R}$.

5p **b)** Determinaţi asimptotele la graficul funcţiei f.

5p **c)** Scrieţi ecuaţia dreptei tangente la graficul funcţiei f în punctul de abscisă $x_0 = 0$.

2. Se consideră funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = e^{-5x}\sqrt{x^2+5}$.

5p **a)** Dacă $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ este o primitivă oarecare a funcţiei f, studiaţi monotonia funcţiei F.

5p **b)** Calculţi $\int_0^1 e^{5x} f(x)\, dx$.

5p **c)** Calculaţi volumul corpului obţinut prin rotaţia graficului funcţiei $g : [0,1] \to \mathbb{R}$, $g(x) = e^{5x}\sqrt[4]{x^2+5} \cdot f(x)$ în jurul axei Ox.

Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.

Universitatea din Craiova
Facultatea de Automatică, Calculatoare şi Electronică
Examen de admitere la licenţă - Sesiunea iulie 2016
Proba scrisă la matematică

Model 4

SUBIECTUL I (30 de puncte)

5p **1.** Calculaţi suma $S = \log_5 \frac{1}{2} + \log_5 \frac{2}{3} + ... + \log_5 \frac{624}{625}$.

5p **2.** Rezolvaţi în $\mathbb{R}$ inecuaţia $\frac{2x+1}{x-1} < 0$.

5p **3.** Rezolvaţi în $\mathbb{R}$ ecuaţia $\log_3^2 x - 5\log_3 x + 4 = 0$.

5p **4.** În reperul cartezian xOy considerăm punctele $A(0,5)$ şi $B(4,1)$. Scrieţi ecuaţia mediatoarei segmentului AB.

5p **5.** Calculaţi distanţa de la vârful parabolei asociate funcţiei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 3x - 4$ la axa Ox.

5p **6.** Rezolvaţi în $\mathbb{R}$ ecuaţia $\sqrt{x} + x = 2$.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. În $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ se consideră matricea $A = \begin{pmatrix} 5 & 10 \\ -2 & -4 \end{pmatrix}$ şi mulţimea $H = \{X(a) \mid a \in \mathbb{R}, X(a) = I_2 + a \cdot A\}$.

5p **a)** Arătaţi că $I_2 \in H$.

5p **b)** Arătaţi că $X(a) \cdot X(b) = X((a+1)(b+1) - 1)$, $\forall a, b \in \mathbb{R}$.

5p **c)** Arătaţi că $X(1) \cdot X(2) \cdot ... \cdot X(2015) = X(2016! - 1)$.

2. Se consideră polinomul $f = 3X^4 - aX^3 - aX + 3$, $a \in \mathbb{R}$ şi fie x_1, x_2, x_3 şi x_4 rădăcinile sale.

5p **a)** Calculaţi $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} + \frac{1}{x_4}$.

5p **b)** Arătaţi că polinomul f nu e divizibil cu $X^2 - 1$, pentru nicio valoare realaă a lui a.

5p **c)** Calculaţi $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + x_4^3$.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Fie funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = e^{2016x} + 15x + 1$.

5p **a)** Calculaţi $\lim\limits_{x \to 0} \frac{f(x) - 2}{x}$.

5p **b)** Demonstraţi că f este bijectivă.

5p **c)** Studiaţi convexitatea şi concavitatea funcţiei f.

2. Se consideră funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x^3}{x^4 + 5}$.

5p **a)** Calculaţi $\int_0^1 f(x)dx$.

5p **b)** Calculaţi $\int_0^5 \frac{5f(x) + x^4 f(x)}{x^8 + 25} dx$.

5p **c)** Aflaţi $\lim\limits_{x \to 5} \frac{1}{x-5} \int_5^x f(t)dt$.

Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.

Universitatea din Craiova
Facultatea de Automatică, Calculatoare şi Electronică
Examen de admitere la licenţă - Sesiunea iulie 2016
Proba scrisă la matematică

Model 5

SUBIECTUL I (30 de puncte)

5p **1.** Calculaţi suma primilor 15 termeni ai progresiei aritmetice $(a_n)_{n\geq 1}$, ştiind că $a_1 = 2$ şi $a_2 = 6$.

5p **2.** Determinaţi coordonatele vârfului parabolei asociate funcţiei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = -x^2 + 5x + 8$.

5p **3.** Determinaţi coeficientul binomial al termenului care conţine pe x^2 în dezvoltarea binomului $\left(x + \dfrac{2}{x}\right)^{32}$, $x > 0$.

5p **4.** Scrieţi ecuaţia dreptei ce trece prin punctul $A(4, -2)$ şi este perpendiculară pe dreapta d de ecuaţie $2x - 4y + 5 = 0$.

5p **5.** Determinaţi tg $(2a)$, ştiind că $\sin a = \dfrac{4}{5}$ şi $a \in \left(\dfrac{\pi}{2}, \pi\right)$.

5p **6.** Fie x_1, x_2 soluţiile ecuaţiei $x^2 + x + 1 = 0$. Calculaţi $x_1^3 + x_2^3$.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Fie matricele $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ şi $A = a \cdot I_3 + b \cdot B$, $a, b \in \mathbb{R}$.

5p **a)** Calculaţi B^2.

5p **b)** Calculaţi B^{-1}.

5p **c)** Demonstraţi că $\forall a, b \in \mathbb{R}$, $(a - b) \cdot \det A \geq 0$.

2. Se consideră polinomul $f = X^4 + aX^3 + 2X^2 - 2X + 1 \in \mathbb{R}[X]$ şi a un număr real.

5p **a)** Aflaţi a, ştiind că $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + 2(x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1) = 0$.

5p **b)** Pentru $a = -2$ aflaţi radăcinile polinomului f.

5p **c)** Verificaţi egalitatea $S_4 + aS_3 + 2S_2 = S_1 - a - 4$, unde $S_n = x_1^n + x_2^n + x_3^n + x_4^n$, $n \in \mathbb{N}^*$.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcţia $f : \mathbb{R}\setminus\{5\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{x+5}{x-5}$.

5p **a)** Calculaţi $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x) - f(0)}{x}$.

5p **b)** Determinaţi intervalele de monotonie ale funcţiei f.

5p **c)** Aflaţi ecuaţia dreptei tangente la graficul funcţiei f în punctul de abscisă $x_0 = 0$.

2. Fie funcţia $f_n : [0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = \displaystyle\int_0^x t^n \cdot e^{-t^3} dt$, unde $n \in \mathbb{N}^*$.

5p **a)** Calculaţi $f_2(x)$, $x \in [0, \infty)$.

5p **b)** Studiaţi monotonia funcţiei f_3.

5p **c)** Determinaţi punctele de inflexiune ale graficului funcţiei f_3.

Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.

Universitatea din Craiova
Facultatea de Automatică, Calculatoare şi Electronică
Examen de admitere la licenţă - Sesiunea iulie 2016
Proba scrisă la matematică

Model 6

SUBIECTUL I (30 de puncte)

5p **1.** Calculaţi $\sqrt{2}+\sqrt{2+\sqrt{3}}+\sqrt{2-\sqrt{3}}$.

5p **2.** Determinaţi numărul termenilor iraţionali ai dezvoltării binomului $\left(\sqrt{3}+1\right)^{100}$.

5p **3.** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\log_2 x+\log_4 x+\log_8 x=\dfrac{11}{6}$.

5p **4.** Se consideră vectorii $\overrightarrow{u}=(a+3)\overrightarrow{i}+\overrightarrow{j}$ şi $\overrightarrow{v}=a\overrightarrow{i}+\overrightarrow{j}$, $a\in\mathbb{R}$. Determinaţi valorile lui a, astfel încât $\overrightarrow{u}$ şi $\overrightarrow{v}$ să fie perpendiculari.

5p **5.** Determinaţi modulul numărului complex $z=\left(\dfrac{1+3i}{3-i}\right)^{25}$.

5p **6.** Calculaţi suma $S=2+5+8+...+122$.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Se consideră matricea $A=\begin{pmatrix} 2 & -2 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -3 \end{pmatrix}$.

5p **a)** Calculaţi $\det A$.

5p **b)** Calculaţi A^n, unde $n\in\mathbb{N}^*$.

5p **c)** Arătaţi că $B^n\neq O_3$, $\forall n\in\mathbb{N}^*$, unde $B=(a-1)\cdot C+A$, $C=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ şi $a\in\mathbb{R}$.

2. Fie mulţimea $M=\left\{A(x)\mid A(x)=\begin{pmatrix} 1 & 0 & x \\ 0 & 3^x & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ x\in\mathbb{R}\right\}$.

5p **a)** Arătaţi că M este parte stabilă a lui $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ în raport cu înmulţirea matricelor, „$\cdot$".

5p **b)** Arătaţi că $(M,\cdot)$ este grup.

5p **c)** Calculaţi $A(x)^n$, unde $n\in\mathbb{N}^*$, $x\in\mathbb{R}$.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=5e^x+x^2-6x+2$.

5p **a)** Calculaţi $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

5p **b)** Calculaţi $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x+1)}{f(x)}$.

5p **c)** Arătaţi că funcţia f este convexă pe $\mathbb{R}$.

2. Se consideră funcţia $f:[-5,5]\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt{25-x^2}$.

5p **a)** Calculaţi $\displaystyle\int_{-5}^{5} x^{2015}f(x)\,dx$.

5p **b)** Aflaţi volumul corpului obţinut prin rotaţia graficului funcţiei f în jurul axei Ox.

5p **c)** Calculaţi $\displaystyle\int_{0}^{5} x^3 f(x)\,dx$.

Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.

Universitatea din Craiova
Facultatea de Automatică, Calculatoare şi Electronică
Examen de admitere la licenţă - Sesiunea iulie 2016
Proba scrisă la matematică

Model 7

SUBIECTUL I (30 de puncte)

5p **1.** Calculaţi raţia progresiei geometrice $(b_n)_{n\geq 1}$ cu termenii pozitivi, dacă $b_4 = 16$ şi $b_2 = 4$.

5p **2.** Rezolvaţi în $\mathbb{R}$ inecuaţia $\left(\frac{1}{2}\right)^{x-1} < \left(\frac{1}{2}\right)^{-3x+7}$.

5p **3.** Aflaţi termenul din dezvoltarea binomului $\left(\sqrt[3]{x^2} - \frac{x}{4}\right)^{12}$, care conţine pe x^{10}.

5p **4.** Calculaţi distanţa de la punctul $A(-1, 0)$ la dreapta d de ecuaţie $4x+3y+1 = 0$.

5p **5.** Arătaţi că parabola asociată funcţiei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + x + 1$ este situată deasupra axei Ox.

5p **6.** Determinaţi $\sin 2a$, când $\cos a = -\frac{1}{3}$ şi $a \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Se consideră determinantul $D(a) = \begin{vmatrix} a-5 & -1 & -1 \\ -1 & a-5 & -1 \\ -1 & -1 & a-5 \end{vmatrix}$.

5p **a)** Calculaţi $D(7)$.

5p **b)** Arătaţi că $D(a) = (a-7)(a-4)^2$, $\forall a \in \mathbb{R}$.

5p **c)** Determinaţi numerele reale x, pentru care $D\left(7^{x^2}\right) = 0$.

2. Se consideră mulţimea $G = (5, \infty)$ şi legea de compoziţie $x \circ y = xy - 5x - 5y + 30$.

5p **a)** Arătaţi că $(G, \circ)$ este grup.

5p **b)** Arătaţi că funcţia $f : G \to \mathbb{R}$, $f(x) = \ln(x-5)$ este un izomorfism între grupurile $(G, \circ)$ şi $(\mathbb{R}, +)$.

5p **c)** Calculaţi $a = 1 \circ 2 \circ 3 \circ ... \circ 2016$.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x}{x^2+9}$.

5p **a)** Calculaţi $f'(x)$, $x \in \mathbb{R}$.

5p **b)** Determinaţi punctele de extrem ale funcţiei f.

5p **c)** Determinaţi punctele de inflexiune ale graficului funcţiei f.

2. Se consideră funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 5x + 5 \text{ arctg } x$.

5p **a)** Arătaţi că f este bijectivă.

5p **b)** Calculaţi $\int_0^1 f(x)\,dx$.

5p **c)** Calculaţi $\int_0^1 \frac{f(x)}{x^2+1}dx$.

Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.

Universitatea din Craiova
Facultatea de Automatică, Calculatoare şi Electronică
Examen de admitere la licenţă - Sesiunea iulie 2016
Proba scrisă la matematică

Model 8

SUBIECTUL I (30 de puncte)

5p **1.** Fie numărul complex $z = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$. Calculaţi z^{2016}.

5p **2.** Dacă x_1 şi x_2 sunt rădăcinile ecuaţiei $x^2 - 5x + 4 = 0$, atunci să se calculeze $\frac{x_1^3 + x_2^3}{x_1 + x_2}$.

5p **3.** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $3^{x-2} - \frac{1}{9} = 0$.

5p **4.** Determinaţi numărul submulţimilor cu două elemente ale mulţimii 1, 2, 3, …, 2016.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(-1, 1)$, $B(1, 0)$, $C(1, -1)$. Calculaţi aria triunghiului ABC.

5p **6.** Determinaţi $\sin 2\alpha$, ştiind că $\cos\alpha = -\frac{1}{2}$, $\alpha \in (0, \pi)$.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Fie G mulţimea tuturor matricilor pătratice de ordinul trei, cu elemente numere reale, de forma $M_{a,b} = \begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix}$.

5p **a)** Calculaţi $\det M_{a,b}$.

5p **b)** Arătaţi că $H = \{M_{a,b} \in G | \det M_{a,b} = 1\}$ este o parte stabilă a lui $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ faţă de înmulţirea matricilor „$\cdot$”.

5p **c)** Arătaţi că $(H, \cdot)$ este un grup .

2. Fie sistemul de ecuaţii liniare omogene $\begin{cases} x + y + 2z = 0 \\ x + y + 2z = 0 \\ 2x + 2y + 4z = 0\,. \end{cases}$

5p **a)** Determinaţi rangul matricii sistemului.

5p **b)** Precizaţi două soluţii pentru acest sistem.

5p **c)** Determinaţi mulţimea tuturor soluţiilor acestui sistem.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Fie funcţia $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \ln x - \frac{1}{x}$.

5p **a)** Arătaţi că funcţia f este strict crescatoare.

5p **b)** Scrieţi ecuaţia tangentei la graficului funcţiei f în punctul de abscisă $x_0 = 1$, situat pe graficul lui f.

5p **c)** Calculaţi $\int_1^e x f(x)\, dx$.

2. Fie funcţiile $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}^*$, definite astfel: $f_1(x) = 1$, $f_{n+1}(x) = \int_1^x f_n(t)\, dt$, $n \geq 1$.

5p **a)** Calculaţi $f_2(x)$ şi $f_3(x)$, $x \in \mathbb{R}$.

5p **b)** Folosind metoda inducţiei matematice, arătaţi că $f_n(x) = \frac{(x-1)^{n-1}}{(n-1)!}$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}^*$.

5p **c)** Dacă $a_n = f_{n+1}(2)$, atunci arătaţi că $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.

Universitatea din Craiova
Facultatea de Automatică, Calculatoare şi Electronică
Examen de admitere la licenţă - Sesiunea iulie 2016
Proba scrisă la matematică

Model 9

SUBIECTUL I (30 de puncte)

5p 1. Fie numărul complex $z = -2 - i$. Calculaţi modulul lui $(z+2)^{2016}$.
5p 2. Determinaţi coordonatele punctelor de intersecţie cu axa Ox a graficului funcţiei de gradul doi $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - x - 2$.
5p 3. Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\sqrt{3x+4} = 2$.
5p 4. Determinaţi numărul numerelor naturale n pentru care $n! \leq 720$.
5p 5. În reperul cartezian xOy se consideră punctul $A(-1,1)$ şi dreapta d de ecuaţie $x + y + 1 = 0$. Calculaţi distanţa de la A la dreapta d.
5p 6. Dacă $BC = 5$, $AB = 4$ şi $AC = 3$, atunci determinaţi raza cercului înscris în triunghiul ABC.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Pe mulţimea numerelor reale $\mathbb{R}$ se defineşte legea de compoziţie dată de $x \circ y = xy + 2x + 2y + 2$.

5p a) Arătaţi că $x \circ y = (x+2)(y+2) - 2$ pentru orice numere reale x, y.
5p b) Determinaţi elementele simetrizabile faţă de legea de compoziţie $\circ$.
5p c) Arătaţi că $\underbrace{x \circ x \circ \cdots \circ x}_{\text{de } n \text{ ori}} = (x+2)^n - 2$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$.

2. Se consideră polinomul $f = X^3 + X^2 + X + 1 \in \mathbb{R}[X]$.

5p a) Arătaţi că f divide polinomul $g = (X^2 - 1)(X^2 + 1)$.
5p b) Determinaţi rădăcinile x_1, x_2, x_3 ale polinomului f.
5p c) Calculaţi $x_1^2x_2^2 + x_2^2x_3^2 + x_3^2x_1^2$.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Fie funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definită prin $f(x) = \min\left(x, \dfrac{2}{1+x^2}\right)$.

5p a) Arătaţi că $f(x) = \begin{cases} x, & \text{dacă } x \leq 1, \\ \dfrac{2}{1+x^2}, & \text{dacă } x > 1. \end{cases}$
5p b) Arătaţi că f admite primitive şi determinaţi o primitivă F a lui f.
5p c) Calculaţi $I = \displaystyle\int_0^2 xf(x)\,dx$.

2. Pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, se dă funcţia $f_n : [0,\infty) \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = \dfrac{1 + x + x^2 + \cdots + x^n}{1 + x^n}$.

5p a) Calculaţi $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(1)$.
5p b) Studiaţi continuitatea şi derivabilitatea funcţiei $f : [0,\infty) \setminus \{1\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$.
5p c) Calculaţi $I = \displaystyle\int_0^1 [f_2(x) - f_1(x)]\,dx$.

Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.

Universitatea din Craiova
Facultatea de Automatică, Calculatoare şi Electronică
Examen de admitere la licenţă - Sesiunea iulie 2016
Proba scrisă la matematică

Model 10

SUBIECTUL I (30 de puncte)

5p **1.** Fie numărul complex $z = -1 + i$. Calculaţi $\log_2 |z|$.

5p **2.** Dacă x_1 şi x_2 sunt rădăcinile ecuaţiei $x^2 + 1 = 0$, atunci să se calculeze $x_1^{2016} + x_2^{2016}$.

5p **3.** Rezolvaţi ecuaţia $\sqrt[3]{x^3 + 3x^2 + 3x + 1} - 27 = 0$.

5p **4.** Se consideră experienţa aruncării simultane cu două zaruri identice. Determinaţi probababilitatea de a obţine suma zarurilor egală cu 7.

5p **5.** Scrieţi ecuaţia dreptei g care trece prin punctul $A(-1, 1)$ şi este perpendiculară pe dreapta d de ecuaţie $2x + y - 1 = 0$.

5p **6.** Dacă în triunghiul ABC se cunosc lungimile laturilor $BC = 10$, $AB = 6$, $AC = 7$, atunci calculaţi $\cos A$.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Fie legea de compoziţie pe $* : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x * y = x + y + xy$.

5p **a)** Calculaţi $x * 0$ şi $x * (-1)$, $x \in \mathbb{R}$.

5p **b)** Verificaţi dacă $(\mathbb{R}, *)$ este un grup abelian sau nu.

5p **c)** Rezolvaţi în $\mathbb{R}$ ecuaţia $x * x * x * x * x = -1$.

2. În $\mathbb{Z}_5[X]$ se consideră polinomul $f = X^3 + X + \widehat{1}$, unde $\mathbb{Z}_5 = \{\widehat{0}, \widehat{1}, \widehat{2}, \widehat{3}, \widehat{4}\}$.

5p **a)** Calculaţi $f(\widehat{0})$, $f(\widehat{1})$, $f(\widehat{2})$, $f(\widehat{3})$, $f(\widehat{4})$.

5p **b)** Determinaţi rădăcinile din $\mathbb{Z}_5$ ale polinomului $\widetilde{f} = f + \widehat{1}$.

5p **c)** Determinaţi câtul şi restul împărţirii polinomului f la polinomul $g = X^2 + \widehat{1}$.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Fie funcţia $f : \mathbb{R} \setminus \{1\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{x^2 + mx + 1}{x - 1}$, $m \in \mathbb{R}$.

5p **a)** Pentru $m = 0$, calculaţi $f'(x)$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

5p **b)** Determinaţi m astfel încât dreapta $y = x + 2$ să fie o asimptotă la graficul lui f.

5p **c)** Pentru $m = 1$, calculaţi $\displaystyle\int_{-1}^{0} f(x)\, dx$.

2. Fie funcţia $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \ln x - x$.

5p **a)** Determinaţi abscisa punctului de extrem al funcţiei f.

5p **b)** Scrieţi ecuaţia tangentei la graficului funcţiei f în punctul $M(e, f(e))$.

5p **c)** Calculaţi $\displaystyle\int_{1}^{e} f(x)\, dx$.

Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.

Universitatea din Craiova
Facultatea de Automatică, Calculatoare şi Electronică
Examen de admitere la licenţă - Sesiunea iulie 2016
Proba scrisă la matematică

Model 11

SUBIECTUL I (30 de puncte)

5p **1.** Fie numărul complex $z = \dfrac{1+i}{1-i} - \dfrac{1-i}{1+i}$. Calculaţi $|z|^{2016}$.

5p **2.** Dacă x_1 şi x_2 sunt rădăcinile ecuaţiei $x^2+x+m=0$ şi verifică relaţia $x_1^2+x_2^2 = -1$, atunci să se determine parametrul real m.

5p **3.** Determinaţi cel mai mare număr natural par, de trei cifre, care se poate forma cu cifrele 1, 2, 3, 4 şi 5.

5p **4.** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\log_3(\sqrt{x^2+3x+1}) = 2\log_9 x$.

5p **5.** Determinaţi numărul real m ştiind că vectorii $\vec{a} = -\vec{i} + 2m\vec{j}$ şi $\vec{b} = \vec{i} - \vec{j}$ sunt coliniari.

5p **6.** Dacă $\cos a = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$, $a \in (0, \pi)$, atunci calculaţi $\dfrac{\sin a + \cos a}{\sin a - \cos a}$.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Fie matricea $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ m & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, unde m este un număr real.

5p **a)** Determinaţi m astfel încât matricea A să aibă rangul doi.

5p **b)** Pentru $m = 1$, determinaţi A^{-1}.

5p **c)** Găsiţi două matrici pătratice, de ordinul trei, A_1 simetrică şi A_2 antisimetrică astfel încât $A = A_1 + A_2$.

2. Fie polinomul $f = X(X+1)^{2n+1} + (m-1)X^n$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$, $m \in \mathbb{R}$.

5p **a)** Calculaţi $f(\varepsilon)$, unde ε este o rădăcină complexă a polinomului $X^3 - 1 = 0$.

5p **b)** Determinaţi m astfel încât f să fie divizibil cu $X^2 + X + 1$.

5p **c)** Pentru $n = 3$ şi $m = 1$ rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $f(x) = 0$.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Fie funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = |x-1| - 1$.

5p **a)** Determinaţi coordonatele punctelor de intersecţie cu axa Ox a graficului funcţiei f.

5p **b)** Studiaţi continuitatea şi derivabilitatea funcţiei f.

5p **c)** Calculaţi $\displaystyle\int_0^2 f(x)\,dx$.

2. Fie funcţiile f, $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 + x$, $g(x) = \dfrac{e^x}{x^2+1}$.

5p **a)** Calculaţi $f'(x)$ şi $g'(x)$, $x \in \mathbb{R}$.

5p **b)** Calculaţi $I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{1}{n}} (f(x) \cdot g(x))\,dx$, $n \in \mathbb{N}^*$.

5p **c)** Calculaţi $\displaystyle\lim_{n\to\infty} n^2\,(I_n - 1)$.

Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.

Universitatea din Craiova
Facultatea de Automatică, Calculatoare şi Electronică
Examen de admitere la licenţă - Sesiunea iulie 2016
Proba scrisă la matematică

Model 12

SUBIECTUL I (30 de puncte)

5p **1.** Fie numărul complex $z = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$. Calculaţi $z^{2016} + \overline{z}^{2016}$.

5p **2.** Dacă x_1, x_2 şi x_3 sunt rădăcinile ecuaţiei $x^3 - x^2 + x - 1 = 0$, atunci să se calculeze $x_1^{2016} + x_2^{2016} + x_3^{2016}$.

5p **3.** Rezolvaţi ecuaţia $e^{2x} - 2e^x - 8 = 0$.

5p **4.** Calculaţi suma $C_{2n}^0 - 3C_{2n}^1 + 9C_{2n}^2 - 27C_{2n}^3 + \cdots + 3^{2n}C_{2n}^{2n}$, $n \in \mathbb{N}$.

5p **5.** Scrieţi ecuaţia dreptei g care trece prin punctul $A(1,1)$ şi este paralelă cu dreapta d de ecuaţie $2x + y + 2016 = 0$.

5p **6.** Ordonaţi crescător numerele reale $\cos 1$, $\cos 2$, $\cos 3$.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Fie matricea $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

5p **a)** Calculaţi $\det(A \cdot A^t)$.

5p **b)** Determinaţi inversa matricii A, pentru $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $a_3 = 3$.

5p **c)** Rezolvaţi sistemul liniar omogen de matrice A, pentru $a_1 = -1$, $a_2 = a_3 = 1$.

2. În $\mathbb{Z}[X]$ se consideră polinomul $f = 4X^4 - 4X^2 + 1$.

5p **a)** Calculaţi $f\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

5p **b)** Determinaţi rădăcinile reale ale polinomului f.

5p **c)** Să se descompună polinomul f în factori ireductibili în $\mathbb{Z}[X]$.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Fie funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x + e^x$, $x \in \mathbb{R}$.

5p **a)** Calculaţi $f'(x)$ şi $f''(x)$, $x \in \mathbb{R}$.

5p **b)** Determinaţi punctele de extrem pentru funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = f(x) + f(-x)$.

5p **c)** Calculaţi $\int_0^1 g(x)\, dx$.

2. Fie funcţia $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = xe^{-\frac{1}{x}}$.

5p **a)** Calculaţi limitele $\lim_{x \nearrow 0} f(x)$ şi $\lim_{x \searrow 0} f(x)$.

5p **b)** Determinaţi punctele de extrem local şi global pentru funcţia f.

5p **c)** Calculaţi $\int_1^2 x^2 f\left(\frac{1}{x}\right) dx$.

Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.