Probă scrisă la matematică

Modelul 4

Toate subiectele sunt obligatorii. Timpul de lucru efectiv este de 3 ore. Se acordă din oficiu 10 puncte.

SUBIECTUL I. 30 p

---

1. Fie numărul complex $z = 1 - i$. Calculaţi $(z-1)^{2015}$.
2. Dacă x_1 şi x_2 sunt rădăcinile ecuaţiei $x^2 - 9x + 18 = 0$, atunci să se calculeze $\frac{x_1^2 + x_2^2}{x_1 x_2}$.
3. Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $49^x - 3 \cdot 7^x + 2 = 0$.
4. Determinaţi numărul submulţimilor cu patru elemente ale mulţimii $\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$.
5. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(2,3)$, $B(2,1)$ şi $C(2,5)$. Determinaţi coordonatele centrului de greutate al triunghiului ABC.
6. Calculaţi $\operatorname{tg} \alpha$, ştiind că $\sin \alpha = \frac{1}{5}$, $\alpha \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$.

SUBIECTUL II. 30 p

---

1. Pentru x, y numere reale convenabile definim $x * y = \frac{x+y}{1+xy}$. 15 p

a) Arătaţi că $G = (-1, 1)$ este o parte stabilă a lui $\mathbf{R}$ faţă de legea de compoziţie $*$.

b) Arătaţi că $(G, *)$ este un grup abelian.

c) Arătaţi că funcţia $f : G \to \mathbf{R}$, $f(x) = \int\limits_0^x \frac{1}{1-t^2}\, dt$ este un izomorfism între grupurile $(G, *)$ şi $(\mathbf{R}, +)$.

2. Fie sistemul de ecuaţii liniare omogene 15 p

$$\begin{cases} x + y - z &= 0 \\ x - y + z &= 0 \\ \quad\;\; y - z &= 0\,. \end{cases}$$

a) Determinaţi rangul matricii sistemului.

b) Precizaţi două soluţii pentru acest sistem.

c) Dacă (x_1, y_1, z_1) şi (x_2, y_2, z_2) sunt două soluţii ale sistemului omogen, atunci arătaţi că pentru orice numere reale α, β tripletul

$$(\alpha x_1 + \beta x_2, \alpha y_1 + \beta y_2, \alpha z_1 + \beta z_2)$$

este soluţie a sistemului.

SUBIECTUL III. 30 p

---

1. Fie funcţia $f : (0, \infty) \to \mathbf{R}$, $f(x) = x \ln^2 x$. 15 p

a) Determinaţi intervalele de monotonie ale funcţiei f.

b) Scrieţi ecuaţia tangentei la graficului funcţiei f în punctul de abscisă $x_0 = 1$, situat pe graficul lui f.

c) Calculaţi $\int\limits_e^{e^2} \frac{f(x)}{\ln x}\, dx$.

2. Fie funcţia $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = x^{2n+1} + x$, $n \in \mathbf{N}^*$. 15 p

a) Arătaţi că f este o funcţie strict crescătoare.

b) Calculaţi $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} \cdot \int\limits_0^1 \left(f(x) - x^{2n+1}\right) e^x\, dx$.

c) Determinaţi volumul corpului obţinut prin rotaţia în jurul axei Ox a graficului funcţiei $g : [1, 2] \to \mathbf{R}$, definit prin $g(x) = \frac{f(x) - x}{x^{2n}}$.

Probă scrisă la matematică

Modelul 5

Toate subiectele sunt obligatorii. Timpul de lucru efectiv este de 3 ore. Se acordă din oficiu 10 puncte.

SUBIECTUL I. 30 p

---

1. Fie numărul complex $z = 2 + i$. Calculaţi $(\overline{z - 2})^{2015}$.
2. Determinaţi coordonatele vârfului parabolei asociate funcţiei de gradul doi $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = -x^2 + 2x - 1$.
3. Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\sqrt{x^2 - 2x + 1} = 1$.
4. Calculaţi suma $S = C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 - C_n^3 + \ldots + (-1)^n C_n^n$.
5. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(-2, 1)$, $B(2, -1)$ şi $C(1, 0)$. Determinaţi lungimea vectorului $\overrightarrow{AM}$, ştiind că M este mijlocul segmentului BC.
6. Dacă $BC = 10$, $AB = 6$ şi $AC = 8$, atunci determinaţi raza cercului circumscris triunghiului ABC.

SUBIECTUL II. 30 p

---

1. Pe mulţimea numerelor reale $\mathbf{R}$ se defineşte legea de compoziţie dată de $x \circ y = xy + x + y$. 15 p

a) Arătaţi că $x \circ y = (x + 1)(y + 1) - 1$ pentru orice numere reale x, y.

b) Determinaţi elementele simetrizabile faţă de legea de compoziţie $\circ$.

c) Dacă se consideră funcţia $f : \mathbf{R} \to \mathcal{M}_2(\mathbf{R})$, $f(x) = \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, atunci arătaţi că matricea $f(x \circ (-1))$ este inversabilă pentru orice $x \in \mathbf{R}$.

2. Se consideră polinomul $f = X^3 - X^2 + 2$. 15 p

a) Determinaţi rădăcinile x_1, x_2, x_3 ale polinomului f.

b) Calculaţi $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$.

c) Determinaţi un polinom g de gradul doi, cu coeficienţi reali astfel încât $g(x_1) = x_1$, $g(x_2) = x_3$, $g(x_3) = x_2$.

SUBIECTUL III. 30 p

---

1. Fie funcţia $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ definită prin 15 p

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + x + 1 & \text{dacă} \quad x < 0 \\ e^{-x} & \text{dacă} \quad x \geq 0\,. \end{cases}$$

a) Calculaţi $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$.

b) Calculaţi $f_s'(0) + f_d'(0)$.

c) Arătaţi că funcţia $F : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ definită prin

$$F(x) = \begin{cases} \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + x + 2015 & \text{dacă} \quad x < 0 \\ -e^{-x} + 2016 & \text{dacă} \quad x \geq 0\,. \end{cases}$$

este o primitivă a lui f.

2. Fie funcţia $f : \mathbf{R} \setminus \{-1\} \to \mathbf{R}$, $f(x) = \frac{x-1}{x+1}$. 15 p

a) Scrieţi ecuaţiile asimptotelor la graficul funcţiei f.

b) Calculaţi $I_n = \int\limits_1^n f(x)\, dx$, $n \in \mathbf{N}^*$.

c) Calculaţi $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{I_n}{n}$.

Probă scrisă la matematică

Modelul 6

Toate subiectele sunt obligatorii. Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.
Se acordă din oficiu 10 puncte.

SUBIECTUL I. 30 p

---

1. Fie numărul complex $z = 1 + 2i$. Calculaţi $(z-1)^{10}$.

2. Dacă x_1 şi x_2 sunt rădăcinile ecuaţiei $x^2 - 5x + 4 = 0$, atunci să se calculeze $\frac{x_1^2+x_2^2}{x_1^2 x_2^2}$.

3. Rezolvaţi ecuaţia $\sqrt[3]{x^3 - 3x^2 + 3x - 1} + 1 = 0$.

4. Determinaţi numărul tuturor posibilităţilor de a premia elevii dintr-o clasă formată cu 25 de copii, ştiind că sunt acordate câte un premiu I, II, III şi o menţiune.

5. Scrieţi ecuaţia dreptei g care trece prin punctul $A(1,1)$ şi este paralelă cu dreapta d de ecuaţie $y = -2x + 1$.

6. Dacă în triunghiul ABC se cunosc lungimile laturilor $BC = 13$, $AB = 12$, $AC = 5$, atunci calculaţi $\sin A$.

SUBIECTUL II. 30 p

---

1. Fie matricea $A = \begin{pmatrix} a & a & a \\ a & a & a \\ a & a & a \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbf{R})$. 15 p

a) Calculaţi A^2.

b) Arătaţi că $A^n = 3^{n-1}A$, pentru orice $n \in \mathbf{N}^*$.

c) Pentru $a = 1$, rezolvaţi sistemul liniar omogen de matrice A.

2. În $\mathbf{Z}_3[X]$ se consideră polinomul $f = X^3 + X^2 + \widehat{1}$, unde $\mathbf{Z}_3 = \{\widehat{0}, \widehat{1}, \widehat{2}\}$. 15 p

a) Calculaţi $f(\widehat{0}) + f(\widehat{1}) + f(\widehat{2})$.

b) Determinaţi rădăcinile din $\mathbf{Z}_3$ ale polinomului f.

c) Determinaţi câtul şi restul împărţirii polinomului f la polinomul $g = X^2 + \widehat{2}X$.

SUBIECTUL III. 30 p

---

1. Fie funcţia $f_n : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f_n(x) = \frac{x^n}{e^x}$, $n \in \mathbf{N}^*$. 15 p

a) Calculaţi $f_n'(x)$, $x \in \mathbf{R}$.

b) Calculaţi $\lim\limits_{x\to\infty} x^{-n-2} f_n(x)$.

c) Calculaţi $\int\limits_0^1 f_3(x)\,dx$.

2. Fie funcţia $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = |x+1| - |x-1|$. 15 p

a) Studiaţi continuitatea şi derivabilitatea lui f.

b) Scrieţi ecuaţia tangentei la graficului funcţiei f în punctul de abscisă $x_0 = 0$, situat pe graficul lui f.

c) Calculaţi $\int\limits_{-2}^{2} f(x)\,dx$.

Probă scrisă la matematică

Modelul 7

Toate subiectele sunt obligatorii. Timpul de lucru efectiv este de 3 ore. Se acordă din oficiu 10 puncte.

SUBIECTUL I. 30 p

---

1. Fie numărul complex $z = \frac{1-i}{1+i}$. Calculaţi $\overline{z}^{2015}$.

2. Dacă x_1 şi x_2 sunt rădăcinile ecuaţiei $x^2 - 2x + m = 0$ şi verifică relaţia $x_1 - x_2 = -6$, atunci să se determine parametrul real m.

3. Determinaţi câte numere naturale impare, de două cifre, se pot forma cu cifrele 0, 1, 2 şi 3.

4. Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\log_2(\sqrt{2x-1}) = \log_4 x$.

5. În reperul cartezian xOy se consideră vectorii $\overrightarrow{AB} = 3\overrightarrow{i} + m\overrightarrow{j}$, $\overrightarrow{CD} = (n+1)\overrightarrow{i} + 4\overrightarrow{j}$, unde m, n sunt numere reale. Determinaţi m şi n ştiind că $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$.

6. Dacă $ctga = \frac{1}{\sqrt{3}}$, atunci calculaţi $\frac{\sin a + \sqrt{3}\cos a}{\sin a - 2\sqrt{3}\cos a}$.

SUBIECTUL II. 30 p

---

1. Fie matricea 15 p

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \omega & \omega^2 \\ 1 & \omega^2 & \omega \end{pmatrix},$$

unde ω este una dintre rădăcinile complexe ale ecuaţiei $x^3 - 1 = 0$.

a) Calculaţi $\det A$.

b) Calculaţi A^2.

c) Arătaţi că pentru orice $n \in \mathbf{N}$, $A^{2n} \in \mathcal{M}_3(\mathbf{R})$.

2. Se consideră polinomul cu coeficienţi reali $f = X^3 - 3X^2 + aX - 1$. 15 p

a) Calculaţi $f(1)$.

b) Determinaţi $a \in \mathbf{R}$ astfel încât $X^2 - 2X + 1$ să dividă polinomul f.

c) Pentru $a = 3$ rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $f(2^x) = 0$.

SUBIECTUL III. 30 p

---

1. Fie funcţia $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = \frac{x+2}{x^2+x+1}$. 15 p

a) Calculaţi $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$.

b) Calculaţi $f'(x)$.

c) Calculaţi $\int\limits_0^1 f(x)\,dx$.

2. Fie funcţiile $f_1, f_2 : \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \to \mathbf{R}$, $f_1(x) = \frac{\sin x}{\sin x + \cos x}$, $f_2(x) = \frac{\cos x}{\sin x + \cos x}$. 15 p

a) Calculaţi $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} (f_1(x) + f_2(x))\,dx$.

b) Calculaţi $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} (f_2(x) - f_1(x))\,dx$.

c) Dacă $I = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} f_1(x)\,dx$, atunci calculaţi $\lim\limits_{n\to\infty} I^n$.

Probă scrisă la matematică

Modelul 8

Toate subiectele sunt obligatorii. Timpul de lucru efectiv este de 3 ore. Se acordă din oficiu 10 puncte.

SUBIECTUL I. 30 p

---

1. Fie numărul complex $z = \frac{1}{1-i} - \frac{1}{1+i}$. Calculaţi $z^{2015} + \overline{z}^{2015}$.

2. Dacă x_1, x_2 şi x_3 sunt rădăcinile ecuaţiei $x^3 - 2x^2 + 2x + 17 = 0$, atunci să se calculeze $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$.

3. Rezolvaţi ecuaţia $4^x - 2^{x+1} - 8 = 0$.

4. Calculaţi suma $C_n^0 + 2C_n^1 + 4C_n^2 + \cdots + 2^n C_n^n$, $n \in \mathbf{N}$.

5. Scrieţi ecuaţia dreptei g care trece prin punctul $A(1, -1)$ şi este perpendiculară pe dreapta d de ecuaţie $y = -x + 2$.

6. Dacă în triunghiul ABC se cunosc lungimile laturilor $BC = 6$, $AB = 5$, $AC = 3$, atunci calculaţi $\cos A$.

SUBIECTUL II. 30 p

---

1. Fie matricea $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & b \\ 1 & a^2 & b^2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbf{R})$. 15 p

a) Calculaţi $\det A$.

b) Determinaţi inversa matricii A, pentru $a = 2$, $b = 3$.

c) Rezolvaţi sistemul liniar omogen de matrice A, pentru $a = 1$, $b = -1$.

2. În $\mathbf{Z}_5[X]$ se consideră polinomul $f = X^4 + X^2 + \widehat{3}$, unde $\mathbf{Z}_5 = \{\widehat{0}, \widehat{1}, \widehat{2}, \widehat{3}, \widehat{4}\}$. 15 p

a) Calculaţi $f(\widehat{1})$.

b) Determinaţi rădăcinile din $\mathbf{Z}_5$ ale polinomului f.

c) Să se descompună polinomul f în factori ireductibili în $\mathbf{Z}_5[X]$.

SUBIECTUL III. 30 p

---

1. Fie funcţia $f : D \to \mathbf{R}$, $f(x) = \frac{x-1}{\sqrt{x^2-1}}$, $D \subset \mathbf{R}$. 15 p

a) Determinaţi domeniul maxim de definiţie al lui f.

b) Determinaţi ecuaţiile asimptotelor la graficul funcţiei f.

c) Calculaţi $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_{n+1}^{n+2} f(x) \cdot \sqrt{x^2 - 1}\, dx$.

2. Fie funcţia $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = x^2 - 2|x|$. 15 p

a) Calculaţi limitele $\lim\limits_{x\nearrow 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0}$ şi $\lim\limits_{x\searrow 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0}$.

b) Studiaţi continuitatea şi derivabilitatea lui f.

c) Calculaţi $\int\limits_{-1}^{1} f(x)\, dx$.
